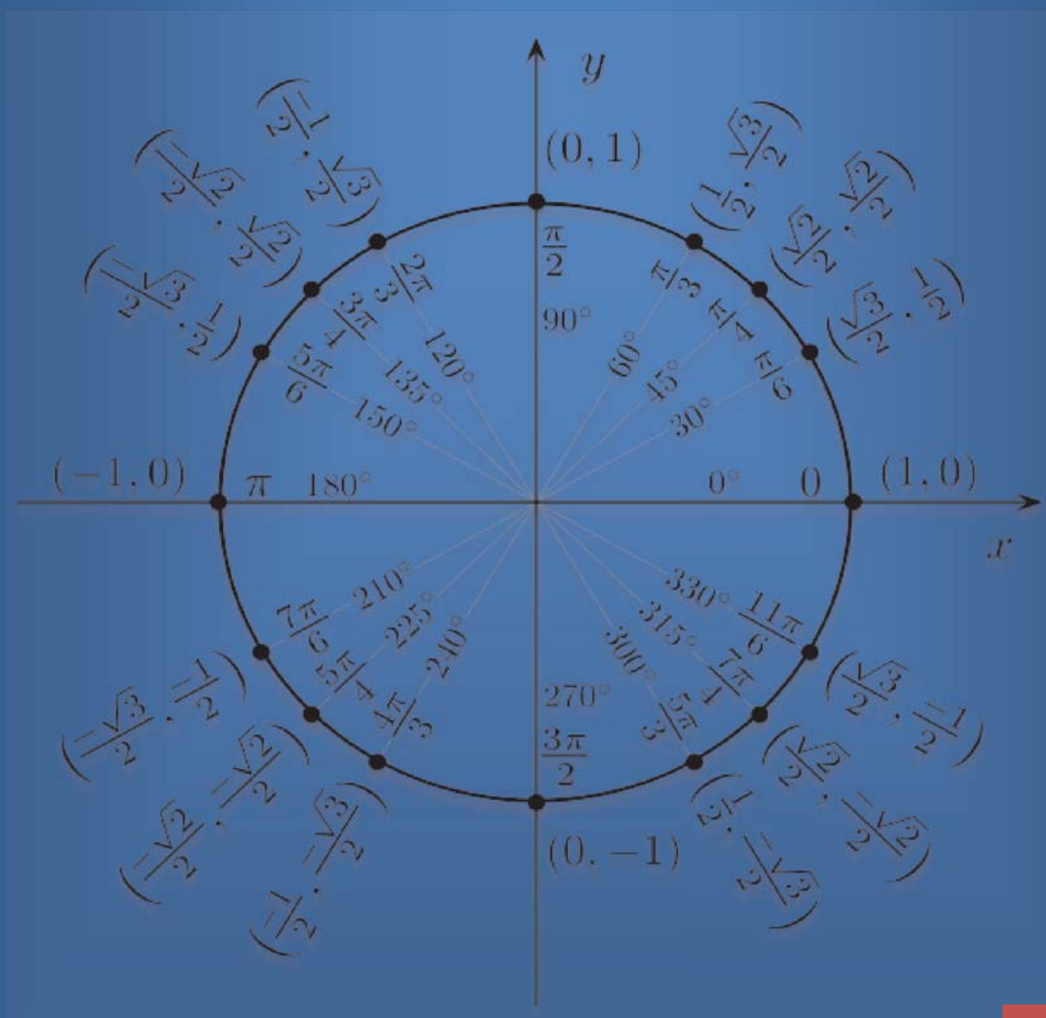





LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 1 : BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC VÀ HỆ THỨC LƯỢNG



VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 1 : BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC VÀ HỆ THỨC LƯỢNG

TP. HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "LƯỢNG GIÁC – MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG" này được biên soạn với mục đích cung cấp, bổ sung kiến thức cho học sinh THPT và một số bạn đọc quan tâm đến mảng kiến thức này trong quá trình học tập và làm việc. Ở cuốn sách này, ngoài việc đưa ra những khái niệm và dạng bài tập cơ bản, chúng tôi sẽ thêm vào đó lịch sử và ứng dụng của môn học này để các bạn hiểu rõ hơn "Nó xuất phát từ đâu và tại sao chúng ta lại phải học nó?".

Ở các chương chính, chúng tôi chia làm 3 phần :

- **Phần I :** Nêu lý thuyết cùng ví dụ minh họa ngay sau đó, giúp bạn đọc hiểu và biết cách trình bày bài. Đồng thời đưa ra các dạng toán cơ bản, thường gặp trong quá trình làm bài trên lớp của học sinh THPT. Ở phần này, chúng tôi sẽ trình bày một số bài để bạn đọc có thể nắm vững hơn, tránh sai sót.
- **Phần II :** Trong quá trình tham khảo và tổng hợp tài liệu, chúng tôi sẽ đưa vào phần này các dạng toán khó nhằm giúp cho các học sinh bồi dưỡng, rèn luyện kĩ năng giải LƯỢNG GIÁC thành thạo hơn khi gặp phải những dạng toán này.
- **Phần III :** Chúng tôi sẽ đưa ra lời giải gợi ý cho một số bài, qua đó bạn đọc kiểm tra lại đáp số, lời giải hoặc cũng có thể tham khảo thêm.

Trong quá trình biên soạn, mặc dù chúng tôi đã cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu có sẵn và tiếp thu có chọn lọc ý kiến từ các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện cuốn sách này, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót bởi tầm hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Chi tiết liên hệ tại : anhkhoavo1210@gmail.com
minh.9a1.dt@gmail.com

CÁC TÁC GIẢ
VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH.

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi xin cám ơn đến những bạn đã cung cấp tài liệu tham khảo và vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc bản đánh máy, tạo điều kiện hoàn thành cuốn sách này :

- Tô Nguyễn Nhật Minh (ĐH Quốc Tế Tp.HCM)
- Ngô Minh Nhựt (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Mai Ngọc Thắng (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Trần Lam Ngọc (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa Tp.HCM)
- Nguyễn Huy Hoàng (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Tp.HCM)
- Nguyễn Hoài Anh (THPT Chuyên Phan Bội Châu Tp.Vinh)
- Phan Đức Minh (ĐH Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội)

và một số thành viên diễn đàn MathScope.



MỤC LỤC

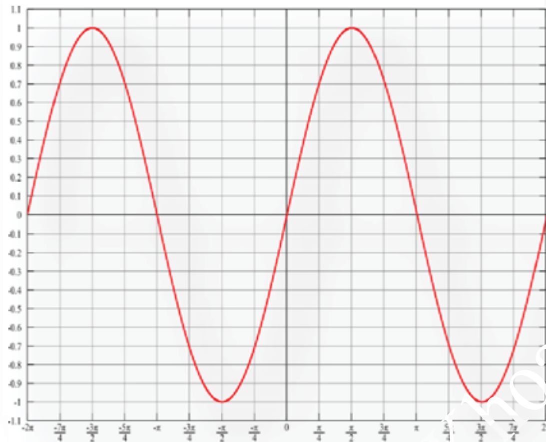
<u>TẬP 1</u> : BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC VÀ HỆ THỨC LƯỢNG

CHƯƠNG 1

SƠ LƯỢC VỀ KHÁI NIỆM VÀ LỊCH SỬ

I. KHÁI NIỆM

Trong toán học nói chung và lượng giác học nói riêng, các hàm lượng giác là các hàm toán học của góc, được dùng khi nghiên cứu tam giác và các hiện tượng có tính chất tuần hoàn. Các hàm lượng giác của một góc thường được định nghĩa bởi tỷ lệ chiều dài hai cạnh của tam giác vuông chứa góc đó, hoặc tỷ lệ chiều dài giữa các đoạn thẳng nối các điểm đặc biệt trên vòng tròn đơn vị. Sâu xa hơn, ở khía cạnh hiện đại hơn, định nghĩa hàm lượng giác là chuỗi vô hạn hoặc là nghiệm của phương trình vi phân, điều này cho phép hàm lượng giác có thể có đối số là một số thực hay một số phức bất kỳ.



(Dạng đồ thị hàm sin)

II. LỊCH SỬ

Những nghiên cứu một cách hệ thống và việc lập bảng tính các hàm lượng giác được cho là thực hiện đầu tiên bởi Hipparchus[(1)] (180-125 TCN), người đã lập bảng tính độ dài các cung tròn và chiều dài của dây cung tương ứng. Sau đó, Ptomely[(2)] tiếp tục phát triển công trình, tìm ra công thức cộng và trừ cho $\sin(A+B)$ và $\cos(A+B)$, Ptomely cũng đã suy diễn ra được công thức hạ bậc, cho phép ông lập bảng tính với bất kỳ độ chính xác cần thiết nào. Tuy nhiên, những bảng tính trên đều đã bị thất truyền.

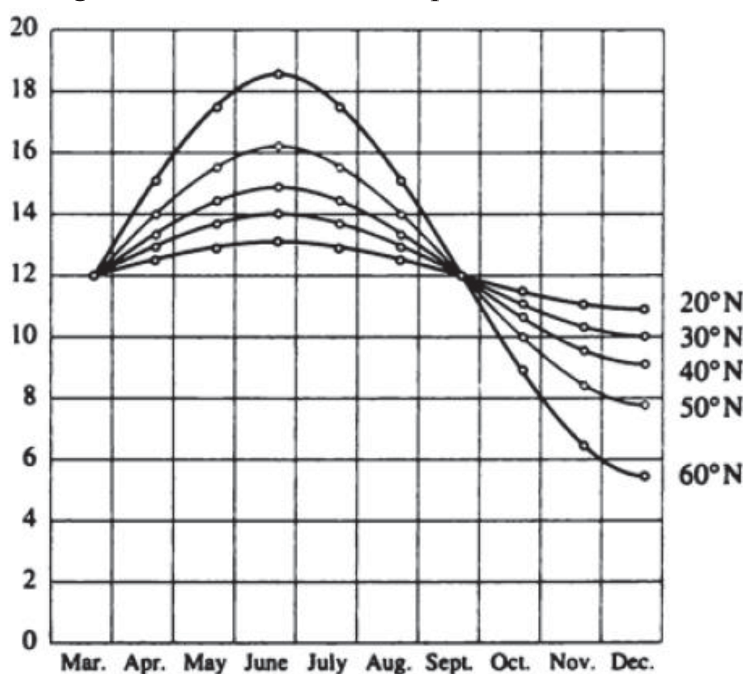
Các phát triển tiếp theo diễn ra ở Ấn Độ, công trình của Surya Siddhanta[(3)] (thế kỷ 4-5) định nghĩa hàm sin theo nửa góc và nửa dây cung. Đến thế kỷ 10, người Ả Rập đã dùng cả 6 hàm lượng giác cơ bản với độ chính xác đến 8 chữ số thập phân.

Các công trình đầu tiên này về các hàm lượng giác cơ bản đều được phát triển nhằm phục vụ trong các công trình thiên văn học, cụ thể là dùng để tính toán các đồng hồ mặt trời.

Ngày nay, chúng được dùng để đo khoảng cách tới các ngôi sao gần, giữa các mốc giới hạn hay trong các hệ thống hoa tiêu vệ tinh. Rộng hơn nữa, chúng được áp dụng vào nhiều lĩnh vực khác : quang học, phân tích thị trường tài chính, điện tử học, lý thuyết xác suất, thống kê, sinh học, dược khoa, hóa học, lý thuyết số, địa chấn học, khí tượng học, hải dương học…

Ta lấy ví dụ từ một bài toán sau trích từ *Lucia C. Hamson, Daylight, Twilight, Darkness and Time* :

Việc mô hình hóa về số giờ chiếu sáng của mặt trời là hàm thời gian trong năm tại nhiều vĩ độ khác nhau. Cho biết Philadelphia nằm ở vĩ độ 40^o Bắc, tìm hàm biểu thị số giờ chiếu sáng của mặt trời tại Philadelphia.



Chú ý rằng mỗi đường cong tương tự với một hàm số sin mà bị di chuyển và kéo căng ra. Tại độ cao của Philadelphia, thời gian chiếu sáng kéo dài 14,8 giờ vào ngày 21 tháng 6 và 9,2 giờ vào ngày 21 tháng 12, vậy nên biên độ của đường cong (hệ số kéo căng theo chiều dọc) là :

$$\frac{1}{2}(14{,}8 - 9{,}2) = 2{,}8$$

Hệ số nào mà chúng ta cần để kéo căng đồ thị hình sin theo chiều ngang nếu chúng ta đo thời gian t trong ngày? Bởi có 365 ngày/ năm, chu kỳ của mô hình nên là 365. Nhưng mà giai đoạn của $y = \sin t$ là 2π, nên hệ số kéo căng theo chiều ngang là :

$$c = \frac{2\pi}{365}$$

Chúng ta cũng để ý rằng đường cong bắt đầu một chu trình của nó vào ngày 21 tháng 3, ngày thứ 80 của năm nên chúng ta phải phải dịch chuyển đường cong về bên phải 80 đơn vị. Ngoài ra, chúng ta phải đưa nó lên trên 12 đơn vị. Do đó chúng ta mô hình hóa số giờ chiếu sáng của của mặt trời trong năm ở Philadelphia vào ngày thứ t của năm bằng hàm số :

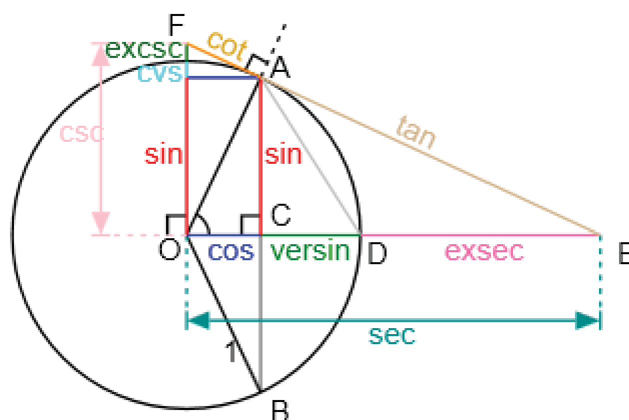
$$L(t) = 12 + 2{,}8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

CHƯƠNG 2
CÁC BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

I. BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Ta gọi cung có liên quan đặc biệt với cung α là các cung :

- Đối với α : $-\alpha$
- Bù với α : $\pi - \alpha$
- Hiệu π với α : $\pi + \alpha$
- Hơn kém $\frac{\pi}{2}$ với α : $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$



	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

Ngoài ra, có một số hàm lượng giác khác :

- $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$
- $\text{versin}\,\alpha = 1 - \cos\alpha$
- $\text{exsec}\,\alpha = \sec\alpha - 1$

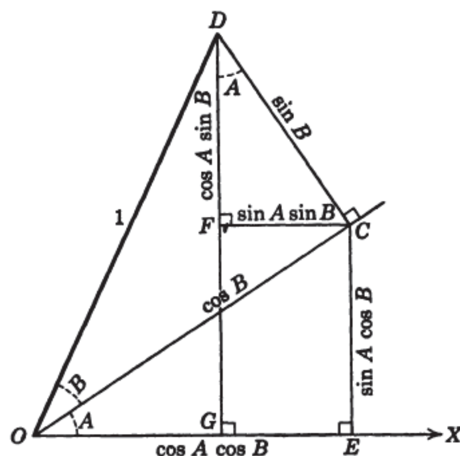
II. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. CÔNG THỨC CƠ BẢN

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x \cot x = 1 \left(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$



Từ hình vẽ thực tiễn trên, ta rút ra được một số công thức cơ bản về hàm lượng giác :

2. CÔNG THỨC CỘNG

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad \left(a, b, a \pm b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b} \quad (a, b, a \pm b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

3. CÔNG THỨC NHÂN

a. CÔNG THỨC NHÂN 2

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \left(x, 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

b. CÔNG THỨC NHÂN 3

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Công thức tổng quát đối với hàm tan :

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}$$

c. CÔNG THỨC TÍNH THEO $t = \tan x$

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$$

d. CÔNG THỨC HẠ BẬC

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4} \qquad \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

a. TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

b. TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \quad \left(a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b} \quad (a, b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan a + \cot b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \sin b} \quad \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq l\pi, k, l \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\cot a - \tan b = \frac{\cos(a+b)}{\sin a \cos b} \quad \left(a \neq k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, k, l \in \mathbb{Z}\right)$$

c. CÔNG THỨC BỔ SUNG

$$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos a \pm \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin a \pm \cos a = 2\sin\left(a \pm \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(a \mp \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin a \pm \sqrt{3}\cos a = 2\sin\left(a \pm \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(a \mp \frac{\pi}{6}\right)$$

$$m\sin a + n\cos a = \sqrt{m^2+n^2}\sin(a+b)$$

Trong đó

$$\begin{cases} m^2+n^2 > 0 \\ \cos b = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\ ;\ \sin b = \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases}$$

III. CÁC LOẠI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

- Ta thường sử dụng các phương pháp : biến đổi vế phức tạp hoặc nhiều số hạng thành vế đơn giản; biến đổi tương đương; xuất phát từ đẳng thức đúng nào đó, biến đổi về đẳng thức cần chứng minh.
- Trong khi biến đổi ta sử dụng các công thức thích hợp hướng đến kết quả phải đạt được.
- Lưu ý một số công thức trên phải chứng minh trước khi sử dụng.

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau :

a. $\cot a - \tan a = 2\cot 2a$

b. $\sin 2a\,(\tan a + \cot a) = 2$

Giải:

a. Ta có :

$$\text{VT} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a\cos a} = \frac{2\cos 2a}{\sin 2a} = \text{VP}$$

b. Ta có :

$$\text{VT} = 2\sin a\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a}\right) = 2(\sin^2 a + \cos^2 a) = 2$$

Bài 2: Chứng minh đẳng thức sau :

a. $\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

b. $\dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c. $\dfrac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \cot^2 x + \tan^2 x$

d. $\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \dfrac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)}$

Giải:

a. Ta có :

$$\mathrm{VT} = \tan^2 x\,(\tan x + 1) + \tan x + 1 = (\tan x + 1)(\tan^2 x + 1) = \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = \mathrm{VP}$$

b. Ta có điều cần chứng minh tương đương với

$$(1 + \cot x)(\tan x - 1) = (\tan x + 1)(1 - \cot x)$$

$\Leftrightarrow \tan x - 1 + \tan x \cot x - \cot x = \tan x - \tan x \cot x + 1 - \cot x$

Điều này hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

c. Ta có :

$$\mathrm{VP} = (\cot x + \tan x)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = \frac{4}{\frac{1 - \cos 4x}{2}} - 2 = \frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \mathrm{VT}$$

d. Ta có :

$$\mathrm{VT} = \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x\,(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)} = \mathrm{VP}$$

Bài 3: Chứng minh :

a. $5 + 3\cos 4x = 8(\sin^6 x + \cos^6 x)$

b. $\sin 2x \tan x = 1 - \cos 2x$

Suy ra giá trị :

$$A = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{3\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}$$

Giải:

a. Ta có :

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x)$

$= \frac{5 + 3\cos^4 x}{8}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b. Ta có :

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$$

Nên

$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$

$\tan \frac{3\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{6}} = 1$

$\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3}$

Vậy $A = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 15$

Bài 4: Chứng minh

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

Áp dụng tính tổng sau :

$$S = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$$

Giải:
Ta có :

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4} = \frac{1+\frac{1+\cos 4x}{2} - 2\cos 2x}{4}$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Suy ra

$$\sin^4 \frac{\pi}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin^4 \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{8}\cos\frac{3\pi}{4}$$
$$\sin^4 \frac{5\pi}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{8} + \frac{1}{8}\cos\frac{5\pi}{4}$$
$$\sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8} + \frac{1}{8}\cos\frac{7\pi}{4}$$

Vì

$$\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} = 0$$

Nên

$$S = \frac{3}{2}$$

Bài 5: Cho x, y, z với $x + y + z = n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$

Chứng minh

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 + 2.(-1)^n \cos x \cos y \cos z$$

Giải:

Ta có :

$$\cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} = 1 + \cos(x+y)\cos(x-y)$$

$$\cos^2 z = \cos^2\big(n\pi - (x+y)\big) = \cos^2(x+y)$$

Nên

$$\begin{aligned}\text{VT} &= 1+\cos(x+y)\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right] = 1+2\cos(x+y)\cos x\cos y\\ &= 1+2\cos(n\pi - z)\cos x\cos y\end{aligned}$$

Khi

- $n = 2m$ thì $\cos(n\pi - z) = \cos z$
- $n = 2m+1$ thì $\cos(n\pi - z) = -\cos z$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Chứng minh

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

(ĐH Đà Nẵng 1998)

Giải: Đặt

$$\text{A} = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$$

Ta có :

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi}{7}\text{A} &= \sin\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\ &= \sin\frac{2\pi}{7} - \left[\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right] + \left[\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right]\\ &= \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\ \left(\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

Do đó

$$\text{A} = \frac{1}{2}$$

Bài 7: Chứng minh

$$\sin^6 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^6 x = \frac{1}{8}(1-\cos^4 2x)$$

Giải: Ta có điều cần chứng minh tương đương với

$$\sin^2 x \cos^2 x\,(\sin^4 x + \cos^4 x) = \frac{1}{8}(1 - \cos^2 2x)(1 + \cos^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x - 16\sin^4 x \cos^4 x = \sin^2 2x\,(1 + \cos^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - \sin^4 2x = \sin^2 2x + \sin^2 2x \cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \sin^2 2x\,(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$$

Điều này hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 8: Chứng minh

$$\left(\frac{\sin a + \cot a}{1 + \sin a \tan a}\right)^n = \frac{\sin^n a + \cot^n a}{1 + \sin^n a \tan^n a}, n \in \mathbb{N}$$

Giải: Ta có :

$$\text{VT} = \left(\frac{\sin a + \cot a}{1 + \sin a \frac{1}{\cot a}}\right)^n = \left(\cot a \frac{\sin a + \cot a}{\sin a + \cot a}\right)^n = \cot^n a$$

$$\text{VP} = \frac{\sin^n a + \cot^n a}{1 + \sin^n a \frac{1}{\cot^n a}} = \cot^n a \frac{\sin^n a + \cot^n a}{\cot^n a + \sin^n a} = \cot^n a$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài 9: Chứng minh

$$\sin^2 a - 2\cos^4 a + 3\cos^2 a = \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} + \frac{1 - \sin^2 a}{1 + \tan a} + \sin a \cos a + 2\sin^2 a \cos^2 a$$

Giải:

Ta có :

$$\text{VT} = \sin^2 a + \cos^2 a + 2\cos^2 a\,(1 - \cos^2 a)$$

$$\text{VP} = \frac{1}{1 + \cot a}(\sin^2 a + \cot a \cos^2 a) + \sin a \cos a + 2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$= \frac{\sin a}{\sin a + \cos a}\left(\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a}\right) + \sin a \cos a + 2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$= 1 - \sin a \cos a + \sin a \cos a + 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 + 2\sin^2 a \cos^2 a$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 10:</u> Chứng minh

$$\sin 2^o \sin 18^o \sin 22^o \sin 38^o \sin 42^o \sin 58^o \sin 62^o \sin 78^o \sin 82^o = \frac{\sqrt{5} - 1}{1024}$$

(ĐHSP Hải Phòng 2001)

<u>Giải:</u> Đặt

$$\mathrm{T} = \sin 2^o \sin 18^o \sin 22^o \sin 38^o \sin 42^o \sin 58^o \sin 62^o \sin 78^o \sin 82^o$$

Ta có :

$$\sin 3a = 4\sin a \sin(60^o + a)\sin(60^o - a)$$

Áp dụng công thức trên, ta được :

$4\sin 2^o \sin(60^o + 2^o)\sin(60^o - 2^o) = \sin 6^o$

$4\sin 18^o \sin(60^o + 18^o)\sin(60^o - 18^o) = \sin 54^o$

$4\sin 22^o \sin(60^o + 22^o)\sin(60^o - 22^o) = \sin 66^o$

Nhân lại, ta được :

$$64\mathrm{T} = \sin 6^o \sin 54^o \sin 66^o$$

$$\Leftrightarrow 64\mathrm{T} = \frac{1}{4}\sin 6^o \sin(60^o + 6^o)\sin(66^o - 6^o) = \frac{1}{4}\sin 18^o = \frac{-1 + \sqrt{5}}{16}$$

Vậy

$$\mathrm{T} = \frac{\sqrt{5} - 1}{1024}$$

Bài 11: Chứng minh rằng

$$\tan a+\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2}+\ \dots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n}-2\cot 2a$$

$$\cos a+\cos 3a+\ \dots+\cos(2n-1)a=\frac{\sin 2na}{2\sin a}\ ,\forall a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),n\in\mathbb{N}$$

$$\sin a+\sin 3a+\ \dots+\sin(2n-1)a=\frac{\sin^2 na}{\sin a}\ ,\forall a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),n\in\mathbb{N}$$

Giải:

- Ta có : $\tan x=\cot x-2\cot 2x$

Sử dụng công thức này, ta được :

$\tan a=\cot a-2\cot 2a$

$\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}-2\cot a$

$\frac{1}{4}\tan\frac{a}{4}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}$

………………………………………..

$\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{a}{2^{n-1}}$

Cộng lại, ta có được điều phải chứng minh.

- Ta sử dụng công thức $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

Ta có : $2\sin a\,\text{VT}=\sin 2a+(\sin 4a-\sin 2a)+(\sin 6a-\sin 4a)+\ \dots+$
$[\sin 2na-\sin(2n-2)a]=\sin 2na$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- Ta sử dụng công thức $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$

Ta có : $2\sin a\,\text{VT}=(1-\cos 2a)+(\cos 2a-\cos 4a)+(\cos 4a-\cos 6a)+\ \dots+$
$[\cos(2n-2)a-\cos 2na]=1-\cos 2na=2\sin^2 na$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.1.1. Chứng minh các đẳng thức sau

a. $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 2x$

b. $4\cos^3 x \sin 3x + 4\sin^3 x \cos 3x = 3\sin 4x$

c. $\tan x + 2\cot 2x = \cot x$

2.1.2. Chứng minh

$$\frac{(\sin^2 x + \tan^2 x + 1)(\cos^2 x - \cot^2 x + 1)}{(\cos^2 x + \cot^2 x + 1)(\sin^2 x + \tan^2 x - 1)} = 1$$

2.1.3. Chứng minh

$$\tan^2 x + \tan^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 9\tan^2 3x + 6$$

Áp dụng tính tổng :

$$\mathrm{S} = \tan^2 5^o + \tan^2 10^o + \cdots + \tan^2 85^o$$

2.1.4. Chứng minh

a) $\sin(n-1)a \sin a = \dfrac{\sin a}{\cot(n-1)a - \cot na}$

b) $\tan(n-1)a \tan na = \cot a\,[\tan na - \tan(n-1)a] - 1$

c) $1 + \dfrac{1}{\cos 2^n a} = \dfrac{\tan 2^n a}{\tan 2^{n-1} a}$

d) $\dfrac{1}{4^n \cos^2 \frac{a}{2^n}} = \dfrac{1}{4^{n-1}}\left[\dfrac{1}{\sin^2 \frac{a}{2^n - 1}} - \dfrac{1}{4\sin^2 \frac{a}{2^n}}\right]$

2.1.5. Chứng minh $\tan^2 20^o$,$\tan^2 40^o$,$\tan^2 80^o$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$

Từ đó suy ra giá trị của

$\mathrm{A} = \tan^2 20^o + \tan^2 40^o + \tan^2 80^o$

$\mathrm{B} = \tan^2 20^o \tan^2 40^o + \tan^2 40^o \tan^2 80^o + \tan^2 80^o \tan^2 20^o$

$\mathrm{C} = \tan^2 20^o \tan^2 40^o \tan^2 80^o$

2.1.6. Cho 3 góc A, B, C thỏa $A + B + C = 45^o$

Chứng minh

$$\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A$$

2.1.7. Chứng minh

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

2.1.8. Chứng minh

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$$

(ĐHQG Hà Nội 1996)

2.1.9. Chứng minh

$$\frac{1 + \cos a}{2 \sin a}\left[1 - \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a}\right] + \frac{\cos^2 b - \sin^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} - \cot^2 b \cot^2 c = \cot a - 1$$

2.1.10. Chứng minh

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x$$

Từ đó, chứng minh : với mọi $n \in \mathbb{N}, x \neq \frac{k\pi}{2^l}$ $(k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N})$

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

2.1.11. Chứng minh

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$$

2.1.12. Chứng minh

$$\cos 12^o + \cos 18^o - 4\cos 15^o \cos 21^o \cos 24^o = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

(ĐHQG Hà Nội 2001)

2.1.13. Chứng minh $4\sin 18^o \sin 54^o = 1$

(ĐH Phòng Cháy Chữa Cháy 2001)

2.1.14. Chứng minh

$$\tan 30^o + \tan 40^o + \tan 50^o + \tan 60^o = \frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^o$$

(ĐHQG Hà Nội 1995)

2.1.15. Chứng minh

a) $16\sin 10^o \sin 30^o \sin 50^o \sin 70^o = 1$

b) $8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} = \cot\frac{\pi}{32}$

2.1.16. Chứng minh

a. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$

b. $\tan 5^o \tan 55^o \tan 65^o \tan 75^o = 1$

2.1.17. Chứng minh

$$\tan 10^o \tan 20^o \tan 30^o \dots \tan 70^o \tan 80^o = 1$$

2.1.18. Chứng minh

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0$$

2.1.19. Chứng minh

$$\frac{1 - 2\sin^2 a}{2\cot\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = 1$$

2.1.20. Chứng minh

$$\frac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{2\cos^2 a + \cos a - 1} = 2\cos a$$

2.1.21. Chứng minh

$$\cot a - \tan a - 2\tan 2a - 4\tan 4a - \ \dots - 2^n \tan 2^n a = 2^{n+1}\cot 2^{n+1} a$$

2.1.22. Chứng minh

$$\sin^8 a - \cos^8 a - 4\sin^6 a + 6\sin^4 a - 4\sin^2 a = 1$$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.1.1. a, b – Sử dụng công thức hạ bậc.

2.1.3. Đặt

$$t = \tan x$$

Khi đó

$$\text{VT} = t^2 + \left(\frac{\sqrt{3} - t}{1 + \sqrt{3}t}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}t}\right)^2$$

Áp dụng tính tổng, viết lại thành

$$\begin{aligned} \text{S} = &(\tan^2 5^o + \tan^2 55^o + \tan^2 65^o) + (\tan^2 10^o + \tan^2 50^o + \tan^2 70^o) \\ &+ (\tan^2 15^o + \tan^2 45^o + \tan^2 75^o) + (\tan^2 20^o + \tan^2 40^o + \tan^2 80^o) \\ &+ (\tan^2 25^o + \tan^2 35^o + \tan^2 85^o) + \tan^2 30^o + \tan^2 60^o \end{aligned}$$

Rồi sử dụng công thức đã chứng minh ở trên.

2.1.4.

a) Để ý

$$\text{VP} = \frac{\sin a}{\dfrac{\sin(na - na + a)}{\sin(n-1)a \sin na}} = \text{VT}$$

b) Để ý

$$\text{VP} = \frac{\cos a - \cos na \cos(n-1)a}{\cos na \cos(n-1)a} = \frac{\frac{1}{2}[\cos a - \cos(2n-1)a]}{\cos na \cos(n-1)a}$$

c) Ta có :

$$\text{VT} = \frac{1 + \cos 2^n a}{\cos 2^n a} = \frac{2\cos^2 2^{n-1}a \sin 2^{n-1}a}{\cos 2^n a \sin 2^{n-1} a} = \frac{\sin 2^n a \cos 2^{n-1} a}{\cos 2^n a \sin 2^{n-1} a} = \text{VP}$$

d) Ta có điều cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{1}{4^n \cos^2 \frac{a}{2^n}} + \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{a}{2^n}} = \frac{1}{4^{n-1}} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2^{n-1}}}$$

2.1.5. Sử dụng công thức

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

Cho $a = 20^o$, ta có :

$$\frac{3\tan 20^o - \tan^3 20^o}{1 - 3\tan^2 20^o} = \sqrt{3}$$

Suy ra

$$(3\tan 20^o - \tan^3 20^o)^2 = 3(1 - 3\tan^2 20^o)^2$$

2.1.6. Áp dụng công thức :

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}$$

2.1.9. Cần chứng minh

$$\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1 - \frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right] = \cot a$$

$$\frac{\cos^2 b - \sin^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} - \cot^2 b \cot^2 c = -1$$

2.1.10. Để ý

$$\cot x - \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x}\ ;\ \cot 2x - \cot 4x = \frac{1}{\sin 4x}$$

$$\cot 4x - \cot 8x = \frac{1}{\sin 8x}\ ;\ \cot 8x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 16x}$$

2.1.12. Ta có :

$$\text{VT} = 2\cos 15^o \cos 3^o - 2\cos 15^o\,(\cos 45^o + \cos 3^o) = \cos 30^o - \cos 60^o$$

2.1.13. Nhân 2 vế cho $\cos 18^o$.

2.1.14. Áp dụng công thức

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

Viết lại VT thành $(\tan 50^{o} + \tan 40^{o}) + (\tan 30^{o} + \tan 60^{o})$

2.1.15.

a) Để ý

$$\cos 10^{o}\,\mathrm{VT} = 8\sin 20^{o}\frac{1}{2}\cos 40^{o}\cos 20^{o}$$

b) Sử dụng công thức

$$\cot a - \tan a = 2\cot 2a$$

Ta có điều phải chứng minh tương đương với

$$\left[\cot\frac{\pi}{32} - \tan\frac{\pi}{32}\right] - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8} = 8$$

2.1.16.

a. Cần chứng minh

$$2^{7}\sin\frac{\pi}{15}\mathrm{VT} = 2^{3}\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}$$

Suy ra

$$2^{7}\sin\frac{3\pi}{15}\mathrm{VT} = 2^{2}\sin\frac{6\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}$$

b. Ta có điều cần chứng minh tương đương với

$$(\sin 5^{o}\sin 75^{o})(\sin 55^{o}\sin 65^{o}) = (\cos 5^{o}\cos 75^{o})(\cos 55^{o}\cos 65^{o})$$

2.1.17.

Để ý rằng $\mathrm{C}^{2} = (\tan 10^{o}\cot 10^{o})(\tan 20^{o}\cot 20^{o})\ldots(\tan 80^{o}\cot 80^{o}) = 1$

2.1.18. Áp dụng công thức

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

2.1.19. Ta chỉ cần chứng minh

$$2\cot\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos^{2}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

2.1.21. Sử dụng công thức sau :

$$\cot a - \tan a = 2\cot 2a$$

2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

- Ở loại bài tập này, ngoài các công thức biến đổi cơ bản, ta cần chú ý thêm các công thức sau :

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right); \sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right); \tan a = \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

- Nhờ cung liên kết ta có thể đưa các cung lớn hơn 90^o hay cung âm về cung trong khoảng $(0^o, 90^o)$.
- Khi cần rút gọn biểu thức

$$\mathrm{A} = \cos a \cos 2a \cos 4a \ldots \cos 2^n a$$

Ta dùng công thức

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$$

- Khi cần rút gọn biểu thức

$$\mathrm{B} = \cos a + \cos 2a + \cos 4a + \cdots + \cos 2na$$

Ta viết

$$\mathrm{B} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\mathrm{B}}{2\sin\frac{a}{2}}$$

Và dùng công thức biến đổi tích thành tổng để rút gọn.

- Ngoài ra, để tính giá trị một biểu thức ta chứng tỏ các số hạng trong biểu thức là nghiệm của một phương trình, từ đó ta dùng công thức Viète[4] để tính tổng hoặc tích của lượng phải tìm.
- Cần nhớ lại công thức Viète bậc 3 sau:
  Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Từ đó có thể suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = -\frac{c}{d}$$

Bài 1: Tính

$$\mathrm{A} = \sin^2 50^o + \sin^2 70^o - \cos 50^o \cos 70^o$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\tan 368^o} + \frac{2\sin 2550^o \cos(-188^o)}{2\cos 638^o + \cos 98^o}$$

Giải: Ta có :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(1 - \cos 100^o) + \frac{1}{2}(1 - \cos 140^o) - \frac{1}{2}(\cos 120^o + \cos 20^o)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^o + \cos 140^o) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^o\right)$$

$$= 1 - (\cos 120^o \cos 20^o) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^o = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\tan 8^o} + \frac{2\sin(-30^o)\cos 8^o}{2\sin 8^o - \sin 8^o} = \cot 8^o - \frac{\cos 8^o}{\sin 8^o} = 0$$

Bài 2: Rút gọn biểu thức

$$\mathrm{A} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left[1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$$

Tính giá trị của A nếu

$$\cos x = -\frac{1}{2}\,, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Giải:

Ta có :

$$A = \frac{1+\cos x}{\sin x}.\frac{2(1-\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{2(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x}$$

Mặt khác

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Longrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A = \frac{2}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

$A = \cos^2 73^o + \cos^2 47^o + \cos 73^o \cos 47^o$

$B = \sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o$

$C = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$

$D = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

$E = \frac{1}{\sin 10^o} - 4\sin 70^o$

Giải: Ta có :

$$\begin{aligned} A &= (\cos 73^o + \cos 47^o)^2 - \cos 73^o \cos 47^o \\ &= (2\cos 60^o \cos 18^o)^2 - \frac{1}{2}(\cos 120^o + \cos 36^o) \\ &= \cos^2 18^o - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 36^o\right) = \frac{1+\cos 36^o}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 36^o = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o = \sin 6^o \cos 48^o \cos 24^o \cos 12^o \\ &= \frac{\sin 12^o}{2\cos 6^o}.\frac{\sin 24^o}{2\sin 12^o}.\frac{\sin 48^o}{2\sin 24^o}.\frac{\sin 96^o}{2\sin 48^o} = \frac{\sin 96^o}{16\cos 6^o} = \frac{\sin(90^o + 6^o)}{16\cos 6^o} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$C=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}.\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}.\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}$$

$$D=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\pi+\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

$$E=\frac{1-4\sin 70^o\sin 10^o}{\sin 10^o}=\frac{1+2(\cos 80^o-\cos 60^o)}{\sin 10^o}=2$$

Bài 4: Rút gọn biểu thức sau với $b>a>0$

$$A=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}}\sin x}{\sqrt{1+\frac{b-a}{a}\sin^2 x}}\sqrt{a+b\tan^2 x}$$

Giải: Ta có :

$$A=\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}\sin x}{\sqrt{1+\frac{b-a}{a}\sin^2 x}}\sqrt{a+\frac{b\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{b\sin^2 x+a\cos^2 x}}\sqrt{\frac{a\cos^2 x+b\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\sin x}{|\cos x|}=\begin{cases}\tan x\ ,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\-\tan x\ ,x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Bài 5: Tính $\sin 18^o$. Từ đó chứng minh $\sin 1^o$ là số vô tỷ.

Giải: Ta có :

$$90^o = 3.18^o + 2.18^o$$

Nên $\cos 2.18^o = \sin 3.18^o$

Suy ra $1 - 2\sin^2 18^o = 3\sin 18^o - 4\sin^3 18^o$

Đặt $= \sin 18^o > 0$; t là nghiệm của phương trình

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Hay

$$(t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$$

Vì $\sin 18^o \neq 1$ nên

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Vì $t > 0$ nên

$$\sin 18^o = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Giả sử $\sin 1^o$ là số hữu tỷ, suy ra $\sin 3^o = 3\sin 1^o - 4\sin^3 1^o$ cũng là số hữu tỷ.

Như vậy lần lượt ta có $\sin 9^o = 3\sin 3^o - 4\sin^3 3^o$; $\sin 27^o = 3\sin 9^o - 4\sin^3 9^o$; $\sin 81^o = 3\sin 27^o - 4\sin^3 27^o$ cũng là những số hữu tỷ.

Do đó, $\sin 18^o = 2\sin 9^o \cos 9^o = 2\sin 9^o \sin 81^o$ cũng là số hữu tỷ.

Mà

$$\sin 18^o = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Nên $\sqrt{5}$ là số hữu tỷ. (vô lý)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = \tan u$, $x_2 = \tan v$. Hãy tính biểu thức sau đây theo a, b, c.

$$\mathrm{P} = a\sin^2(u+v) + b\sin(u+v)\cos(u+v) + c\cos^2(u+v)$$

Giải: Ta xét 2 trường hợp sau

* Nếu $\cos(u+v) = 0$ thì $\mathrm{P} = a$.

* Nếu $\cos(u+v) \neq 0$ thì

$$\mathrm{P} = \cos^2(u+v)\,[a\tan^2(u+v) + b\tan(u+v) + c]$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(u+v)}[a\tan^2(u+v) + b\tan(u+v) + c]$$

Mà

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \frac{-\frac{a}{b}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{b}{c-a}$$

Vậy

$$\mathrm{P} = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2}\left[a\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \frac{b^2}{c-a} + c\right] = c$$

Bài 7: Tìm 1 phương trình bậc 3 có các nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{7}\ , x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}\ , x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$$

Từ đó, tính tổng

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}$$

Giải: Nếu ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = c \end{cases}$$

Thì x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình bậc 3

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

Ta có :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{7}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{9\pi}{7} + \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{8}$$

Vậy phương trình cần tìm là

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$$

Suy ra $S = 4$.

Bài 8: Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải:

Để ý rằng $\frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình $7x = 2\pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Hay $\cos 3x = \cos 4x \ (*)$

Từ $(*)$ ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ (loại vì không thỏa 3 nghiệm trên)

Như vậy

$\frac{2\pi}{7};\frac{4\pi}{7};\frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ $(t = 2\cos x)$

Theo định lý Viète, ta có

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -1 \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -2 \\ t_1t_2t_3 = 1 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3} \\ \mathrm{B} = \sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} \mathrm{A}^3 = (t_1 + t_2 + t_3) + 3\mathrm{AB} - 3\sqrt[3]{t_1t_2t_3} = 3\mathrm{AB} - 4 \\ \mathrm{B}^3 = (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + 3\mathrm{AB} - 3\sqrt[3]{(t_1t_2t_3)^2} = 3\mathrm{AB} - 5 \end{cases}$$

Suy ra

$$(\mathrm{AB})^3 = (3\mathrm{AB} - 4)(3\mathrm{AB} - 5) \Leftrightarrow (\mathrm{AB} - 3)^3 = -7$$

Do đó $\mathrm{AB} = 3 - \sqrt[3]{7}$

Nên $\mathrm{A} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$

Vậy

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Bài 9: Tính tổng

$$\begin{cases} T_1 = \sin^2 a + \sin^2 2a + \ \dots \ + \sin^2 na \\ T_2 = \cos^2 a + \cos^2 2a + \ \dots + \cos^2 na \end{cases}$$

Với $n \in \mathbb{N}, a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải: Từ hệ ta có :

$$\begin{cases} T_2 + T_1 = n \\ T_2 - T_1 = \cos 2a + \cos 4a + \ \dots + \cos 2na \end{cases}$$

Suy ra

$$2\sin a\,(T_2 - T_1) = 2\sin a\cos 2a + 2\sin a\cos 4a + \ \dots + 2\sin a\cos 2na$$

$$= \sin 3a - \sin a + \sin 5a - \sin 3a + \ \dots + \sin(2n+1)a - \sin(2n-1)a$$
$$= \sin(2n+1)a - \sin a = 2\cos(n+1)a\sin na$$

Do đó

$$\begin{cases} T_2 + T_1 = n \\ T_2 - T_1 = \dfrac{\cos(n+1)a\sin na}{\sin a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 = \dfrac{\cos(n+1)a\sin na + n\sin a}{2\sin a} \\ T_1 = \dfrac{n\sin a - \cos(n+1)a\sin na}{2\sin a} \end{cases}$$

Bài 10: Cho $\sin a + \sin b = 2\sin(a+b)\,; a + b \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hãy tìm

$$X = \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}$$

Giải: Từ giả thuyết, ta có :

$$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

Vì $a + b \neq 2k\pi$ nên

$$\frac{a+b}{2} \neq k\pi \Rightarrow \sin\frac{a+b}{2} \neq 0$$

Suy ra, $\cos\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = 2\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow 3\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{X} = \frac{1}{3}$

Bài 11: Rút gọn biểu thức sau

$$\mathrm{A} = \sqrt{1 + 4\sin^2 a\cos^2 a + 4\sin a\cos a} + \sqrt{\cos^4 a - 5\sin^4 a - 4\sin a\cos a + 6\sin^2 a}$$

Giải: Ta có :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \sqrt{1 + 4\sin^2 a\cos^2 a + 4\sin a\cos a\,(\sin^2 a + \cos^2 a)} \\
&\quad + \sqrt{\cos^4 a - 5(1-\cos^2 a)^2 - 4\sin a\cos a\,(\sin^2 a + \cos^2 a) + 6\sin^2 a} \\
&= \sqrt{\sin^4 a + \cos^4 a + 6\sin^2 a\cos^2 a + 4\sin^3 a\cos a + 4\sin a\cos^3 a} \\
&\quad + \sqrt{\cos^4 a + \sin^4 a + 6\sin^2 a\cos^2 a - 4\sin^3 a\cos a - 4\sin a\cos^3 a} \\
&= \sqrt{(\sin a + \cos a)^4} + \sqrt{(\sin a - \cos a)^4} \\
&= (\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2 \\
&= \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a\cos a + \sin^2 a + \cos^2 a - 2\sin a\cos a = 2
\end{aligned}$$

Bài 12:

Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

(ĐH Huế 1996)

Giải: Ta có :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$$

Mặt khác :

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{16}{25}$$

Do $\cos\alpha < 0$ nên

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

Suy ra

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7$$

Bài 13: Tính giá trị của biểu thức

$$\mathrm{A} = \tan^6\frac{\pi}{18} + \tan^6\frac{5\pi}{18} + \tan^6\frac{7\pi}{18}$$

Giải: Ta sẽ áp dụng vào bài toán trên bằng hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Dễ thấy

$$\tan^2 3\left(\frac{\pi}{18}\right) = \tan^2 3\left(\frac{5\pi}{18}\right) = \tan^2 3\left(\frac{7\pi}{18}\right) = \frac{1}{3}$$

Suy ra $\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3\tan^6 x - 27\tan^4 x + 33\tan^2 x - 1 = 0$

Như vậy :

$\tan^2\frac{\pi}{18}$; $\tan^2\frac{5\pi}{18}$; $\tan^2\frac{7\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình $3y^3 - 27y^2 + 33y - 1 = 0$

Theo định lý Viète, ta có :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 9 \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = 11 \\ y_1y_2y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\mathrm{A} = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) + 3y_1y_2y_3 = 433$

Bài 14: Cho $\tan x$; $\tan y$; $\tan z$ là 3 nghiệm của phương trình :

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0\ (a \neq 0)\ ; 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$$

Chứng minh rằng

$$\tan^7 x + \tan^7 y + \tan^7 z \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}$$

Giải: Ở bài toán này, ta thấy $\tan x$; $\tan y$; $\tan z > 0$.

Do đó, theo định lý Viète, ta có :

$$\begin{cases} \tan x + \tan y + \tan z = -\dfrac{b}{a} \\ \tan x \tan y + \tan y \tan z + \tan z \tan x = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Mặt khác :

$$\text{VP} = -\frac{1}{81}\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{c}{a}\right)^2$$
$$= \frac{1}{81}(\tan x + \tan y + \tan z)^3(\tan x \tan y + \tan y \tan z + \tan z \tan x)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức :

$$m^2 + n^2 + k^2 \geq mn + nk + km$$
$$\Longrightarrow (m + n + k)^2 \geq 3(mn + nk + km)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{9}(m + n + k)^4 \geq (mn + nk + km)^2$$

Ta được :

$$\frac{1}{81}(\tan x + \tan y + \tan z)^3(\tan x \tan y + \tan y \tan z + \tan z \tan x)^2$$
$$\leq \frac{1}{81.9}(\tan x + \tan y + \tan z)^7$$

Cần chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{81.9}(\tan x + \tan y + \tan z)^7 \leq \text{VT}$$

Thật vậy, với $\tan x + \tan y + \tan z > 0$, ta có :

$$\text{VT}(\tan x + \tan y + \tan z) \geq \left(\sqrt{\tan x}.\sqrt{\tan^7 x} + \sqrt{\tan y}.\sqrt{\tan^7 y} + \sqrt{\tan z}.\sqrt{\tan^7 z}\right)^2$$
$$\geq \frac{1}{9}.9(\tan^4 x + \tan^4 y + \tan^4 z)^2 \geq \frac{1}{81.9}(\tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z)^4.3^4$$
$$\geq \frac{1}{81.9}(\tan x + \tan y + \tan z)^8$$

Do đó,

$$\tan^7 x + \tan^7 y + \tan^7 z \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}$$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

2.2.1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $\tan 9^o - \tan 27^o - \tan 63^o + \tan 81^o$

b. $\dfrac{(\cot 44^o + \tan 226^o)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o$

c. $\dfrac{\cos(-20^o)\sin 70^o}{\sin 160^o \cos 340^o \tan 250^o}$

2.2.2. Tìm 1 phương trình bậc 3 có các nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{9}\ ; x_2 = \cos\frac{4\pi}{9}\ ; x_3 = \cos\frac{8\pi}{9}$$

Từ đó, tính tổng

$$S = \cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9}$$

2.2.3. Cho

$$3\sin^4 x + 2\cos^4 x = \frac{98}{81}$$

Tính $A = 2\sin^4 x + 3\cos^4 x$.

2.2.4. Tính $\tan(x - 45^o)$, biết

$$\cos x = -\frac{9}{41}\ , x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

2.2.5. Rút gọn các biểu thức sau :

$A = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\tan^2\dfrac{x}{2} - \cos^2 x$

$B = \dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}$

$$\mathrm{C}=\frac{\sin(60^{\mathrm{o}}+x)}{4\sin\left(25^{\mathrm{o}}+\frac{x}{4}\right)\sin\left(75^{\mathrm{o}}-\frac{x}{4}\right)}$$

$$\mathrm{D}=\sin^6(\pi+x)+\cos^6(x-\pi)-2\sin^4(2\pi+x)-\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\mathrm{E}=\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$$

$$\mathrm{F}=\frac{\sin x+m\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x+m\sin 5x+\sin 7x}$$

$$\mathrm{G}=\frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\sin x-\cos x}$$

$$\mathrm{H}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}}}_{n\text{ dấu căn}}\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\mathrm{I}=\frac{\sin^2(a+b)-\sin^2 a-\sin^2 b}{\sin^2(a+b)-\cos^2 a-\cos^2 b}$$

$$\mathrm{J}=\frac{\sin^6 a+\cos^6 a}{4\cos^2 2a+\sin^2 2a}$$

$$\mathrm{K}=\frac{\sin 4a-4\sin 3a+6\sin 2a-4\sin a}{\sin 2a\,(1-\cos a)}$$

$$\mathrm{L}=2\cos 4a+5\cos 6a+2\cos 2a+\cos 8a$$

2.2.6. Tính

$$\mathrm{S}=1+\frac{\cos a}{\cos a}+\frac{\cos 2a}{\cos^2 2a}+\frac{\cos 3a}{\cos^3 a}+\ \ldots+\frac{\cos na}{\cos^n a}$$

2.2.7. Tính $\mathrm{T}=m\sin 2a+n\cos 2a$ biết

$$\tan a=\frac{m}{n}\ ,n\neq 0$$

2.2.8. Tính $\tan a \tan b$ theo m, n biết

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{m}{n}$$

2.2.9. Cho $\tan x = 4$. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\mathrm{M} = \frac{7\cos^5 x - 3\cos^4 x \sin x + 2\cos^2 x \sin^3 x - 5\cos x \sin^4 x - 13\sin^5 x}{\sin^4 x \cos x - 11\sin^3 x \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos^3 x - 9\sin x \cos^4 x + 5\cos^5 x}$$

$$\mathrm{N} = \frac{3\sin^4 x - 8\sin^3 x \cos x + 7\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos^3 x - 2\cos^4 x}{7\sin^4 x + 5\sin^3 x \cos x - 4\sin^2 x \cos^2 x + 6\sin x \cos^3 x - 3\cos^4 x}$$

2.2.10. Cho $\tan x + \cot x = m$. Tính

$$\mathrm{A} = \tan^2 x - \cot^2 x \text{ ; } \mathrm{B} = \tan^3 x - \cot^3 x \text{ ; } \mathrm{C} = \tan^5 x - \cot^5 x$$

2.2.11. Cho $\tan x - \cot x = n$. Tính

$$\mathrm{M} = \tan^2 x + \cot^2 x \text{ ; } \mathrm{N} = \tan^3 x - \cot^3 x \text{ ; } \mathrm{P} = \tan^7 x - \cot^7 x$$

2.2.12. Cho $\tan(a+b) = m$ và $\tan(a-b) = n$. Tính $\tan 2a$.

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.2.3. Đặt

$$\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} (a; b \in [0,1])$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a^2 + 2b^2 = \dfrac{98}{81} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

2.2.4. Để ý

$$\tan(x - 45^o) = \frac{\tan x - \tan 45^o}{1 - \tan x \tan 45^o}$$

2.2.6. Để ý

$$\frac{\cos ka}{\cos^k a} = \frac{\sin a \cos ka}{\sin a \cos^k a} = \frac{\frac{1}{2}[\sin(k+1)a - \sin(k-1)a]}{\sin a \cos^k a} = \frac{\sin(k+1)a}{\sin a \cos^k a} - \frac{\sin ka}{\sin a \cos^{k-1} a}$$

2.2.7. Để ý

$$\sin 2a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a} \text{ ; } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

2.2.8. Từ hệ thức

$$\frac{m}{n}=\frac{1-\tan a\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

Ta biến đổi $\tan a\tan b$ theo m,n.

2.2.9. Để ý bậc của tử bằng bậc của mẫu, do $\tan x$ có giá trị thực nên $\cos x\neq 0$, từ đó ta lần lượt chia tử và mẫu cho $\cos^5 x$ đối với M và cho $\cos^4 x$ cho N.

2.2.10. Để ý

$$\mathrm{C}=\mathrm{AB}+m$$

2.2.11. Để ý

$$\mathrm{P}=\mathrm{N}(\tan^4 x+\cot^4 x)-n$$

3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC SUY TỪ ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KHÁC CHO TRƯỚC

- Đây là loại bài tập chứng minh đẳng thức lượng giác có điều kiện và từ điều kiện kết hợp với các công thức lượng giác phù hợp để suy ra điều cần phải chứng minh.

Bài 1: Cho $\begin{cases} a=\sin x\\ b=\cos x\sin y\\ c=\cos x\cos y\end{cases}$. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2=1$

Giải: Ta có :

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=\sin^2 x+\cos^2 x\,(1-\cos^2 y)+\cos^2 x\cos^2 y\\&=\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x\cos^2 y+\cos^2 x\cos^2 y=1\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu $a,b>0$ và

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

Thì

$$\frac{\sin^{2012} x}{a^{1005}}+\frac{\cos^{2012} x}{b^{1005}}=\frac{1}{(a+b)^{1005}}$$

Giải: Ta có :

$$(a+b)\left(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\right)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\cos^4 x+\frac{b}{a}\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a}=\frac{\cos^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}\ \left(t=\frac{1}{a+b}>0\right)$$

Suy ra

$$\frac{\sin^{2012} x}{a^{1005}}+\frac{\cos^{2012} x}{b^{1005}}=\frac{1}{a^{1005}}(at)^{1006}+\frac{1}{b^{1005}}(bt)^{1006}=\frac{a}{(a+b)^{1006}}+\frac{b}{(a+b)^{1006}}$$
$$=\frac{1}{(a+b)^{1005}}$$

Bài 3: Cho $2\sin x\sin y-3\cos x\cos y=0$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}+\frac{1}{2\sin^2 y+3\cos^2 y}=\frac{5}{6}$$

Giải: Ta có : $2\sin x\sin y-3\cos x\cos y=0$

$$\Rightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x}=3\frac{\cos y}{\sin y}\Rightarrow 2\tan x=3\cot y\Rightarrow \tan y=\frac{3}{2\tan x}$$

Khi đó :

$$\mathrm{VT}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin^2 x+3\cos^2 x}{\cos^2 x}}+\frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{\frac{2\sin^2 y+3\cos^2 y}{\cos^2 y}}$$

$$=\frac{1+\tan^2 x}{2\tan^2 x+3}+\frac{1+\tan^2 y}{2\tan^2 y+3}=\frac{1+\tan^2 x}{2\tan^2 x+3}+\frac{4\tan^2 x+9}{6(3+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{6(1+\tan^2 x)+4\tan^2 x+9}{6(3+2\tan^2 x)}=\frac{5(3+2\tan^2 x)}{6(3+2\tan^2 x)}=\frac{5}{6}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: Cho ΔABC và m, n, p thỏa

$$\frac{m}{\cos A}+\frac{n}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{p}{\cos C}=0\,,\mathrm{A}<C<\frac{\pi}{2}$$

Chứng minh rằng : $mx^2+nx+p=0$ có nghiệm $x\in(0;1)$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Ta có :

$$\cos A\cos C=\frac{1}{2}[\cos(A-C)+\cos(A+C)]<\frac{1}{2}(1-\cos B)=\sin^2\frac{B}{2}$$

$$0<A<C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2A+B<\pi\Rightarrow 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}-A<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{B}{2}<\cos A$$

Đặt $u=\cos A\,;v=\sin\frac{B}{2}\,;w=\cos C\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{v}{u}<1\\0<uw<v^2\end{cases}$

Và $f(x)=mx^2+nx+p$

Ta có 2 trường hợp sau :

Nếu $p=0$ thì $\frac{m}{u}+\frac{n}{v}=0$

- Nếu $m=0\Rightarrow f(x)=0$ có vô số nghiệm thuộc $(0;1)$
- Nếu $m\neq 0$ thì

$$-\frac{n}{m}=\frac{u}{v}\in(0;1)\Rightarrow f(x)=mx\left(x+\frac{n}{m}\right)=0 \text{ có nghiệm thuộc } (0;1)$$

Nếu $p\neq 0$ thì $\frac{m}{u}+\frac{n}{v}+\frac{p}{w}=0\Leftrightarrow\frac{u}{v^2}\left(m\frac{v^2}{u^2}+n\frac{v}{u}+p\right)=\frac{uw-v^2}{v^2w}p$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{uw-v^2}{uw}f(0)$$

Ở đây, ta sẽ sử dụng định lý : Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Như vậy, ta thấy

$$\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \Longrightarrow f \text{ liên tục trên } \left[0; \frac{v}{u}\right] \\ f\left(\frac{v}{u}\right) f(0) = \frac{uw - v^2}{uw} f^2(0) < 0 \end{cases}$$

Do đó, $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5: Cho x, y là 2 góc nhọn thỏa hệ $\begin{cases} 3\sin^2 x + 2\sin^2 y = 1 \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = 0 \end{cases}$

Chứng minh $x + 2y = \frac{\pi}{2}$

Giải: Ta cần chứng minh $\cos(x + 2y) = 0$

Thật vậy, ta có $\cos(x + 2y) = \cos x \cos 2y - \sin x \sin 2y$

Mà

$$\begin{cases} 3\sin^2 x + 2\sin^2 y = 1 \Longrightarrow 3\sin^2 x = \cos 2y \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = 0 \Longrightarrow \sin 2y = \frac{3}{2}\sin 2x = 3\sin x \cos x \end{cases}$$

Suy ra

$$\cos(x + 2y) = \cos x \,.\, 3\sin^2 x - \sin x \,.\, 3\sin x \cos x = 0$$

Mà x, y là 2 góc nhọn nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu

$$\begin{cases} \sin x = 2\sin(x + y) \\ x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Thì

$$\tan(x + y) = \frac{\sin y}{\cos y - 2}$$

(ĐH Thương Mại Hà Nội 1998)

Giải:

Do $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\cos y-2\neq 0$ nên điều kiện được xác định.

Ta có : $\sin x=\sin[(x+y)-y]=\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y$

Do đó

$\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y=2\sin(x+y)$

$\Longrightarrow(\cos y-2)\sin(x+y)=\cos(x+y)\sin y$

$\Longrightarrow\tan(x+y)=\dfrac{\sin y}{\cos y-2}$

Bài 7: Cho

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\frac{a}{b}\ ;\ \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

Chứng minh rằng

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{a\mathrm{A}+b\mathrm{B}}{a\mathrm{B}+b\mathrm{A}}\ ;a\mathrm{B}+b\mathrm{A}\neq 0$$

Giải: Ta có :

$$\frac{a\mathrm{A}+b\mathrm{B}}{a\mathrm{B}+b\mathrm{A}}=\frac{a\mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{b}{a}\right)}{a\mathrm{B}\left(1+\frac{b}{a}.\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)}=\frac{\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}+\frac{\sin(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)}}{1+\frac{\sin(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)}.\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\sin 2(x-\alpha)+\sin 2(x-\beta)]}{\sin(x-\alpha)\cos(x-\beta)+\sin(x-\beta)\cos(x-\alpha)}=\frac{\sin(2x-\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin(2x-\alpha-\beta)}$$
$$=\cos(\alpha-\beta)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 8: Cho

$$\begin{cases} a\cos^3 x + 3a\cos x\sin^2 x = m & (1) \\ a\sin^3 x + 3a\cos^2 x\sin x = n & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\sqrt[3]{(m+n)^2} + \sqrt[3]{(m-n)^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$

Giải: Lấy $(1) + (2)$ suy ra :

$$\begin{aligned} m + n &= a\,(\cos^3 x + \sin^3 x) + 3a\sin x\cos x\,(\sin x + \cos x) \\ &= a(\cos x + \sin x)[(\cos^2 x + \sin^2 x - \cos x\sin x) + 3\cos x\sin x] \\ &= a(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = a(\cos x + \sin x)^3 \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt[3]{(m+n)^2} = (\cos x + \sin x)^2 . \sqrt[3]{a^2}$

Lấy $(1) - (2)$ suy ra :

$$\begin{aligned} m - n &= a(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3a\cos x\sin x\,(\cos x - \sin x) \\ &= a(\cos x - \sin x)[(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x\sin x) - 3\cos x\sin x] \\ &= a(\cos x - \sin x)^3 \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt[3]{(m-n)^2} = (\cos x - \sin x)^2 . \sqrt[3]{a^2}$

Do đó, ta được :

$$\text{VT} = [(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2] . \sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$$

Bài 9: Chứng minh rằng nếu $\cos c = \cos a\cos b$, với a, b, c thỏa các điều kiện xác định cần thiết thì

$$\tan\frac{c+a}{2}\tan\frac{c-a}{2} = \tan^2\frac{b}{2}$$

Giải: Ở bài toán này, ta sẽ sử dụng công thức

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$$

$$\tan\frac{c+a}{2}\tan\frac{c-a}{2} = \frac{\cos a - \cos c}{\cos a + \cos c} = \frac{\cos a - \cos a\cos b}{\cos a + \cos a\cos b} = \frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \tan^2\frac{b}{2}$$

Bài 10: Cho $\cos a + \cos b + \cos c = 0$.

Chứng minh rằng : $12\cos a\cos b\cos c = \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c$

Giải: Đặt

$$\begin{cases} x = \cos a \\ y = \cos b \\ z = \cos c \end{cases} \Longrightarrow x + y + z = 0$$

Ta cần chứng minh: $12xyz = 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 - 3(x + y + z)$

Hay $3xyz = x^3 + y^3 + z^3$

Thật vậy, ta có :

$$\begin{aligned} 0 = (x+y+z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)] + 6xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3[xy(-z) + yz(-x) + zx(-y)] + 6xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 11: Cho 3 số a, b, c đôi một khác nhau và 4 góc x, y, z, t được liên hệ với nhau bởi hệ thức :

$$\frac{a}{\tan(x+y)} = \frac{b}{\tan(x+z)} = \frac{c}{\tan(x+t)}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(y-z) + \frac{b+c}{b-c}\sin^2(z-t) + \frac{c+a}{c-a}\sin^2(t-y) = 0$$

Giải: Áp dụng tính chất của tỷ lệ thức, ta có :

$$\frac{a+b}{\tan(x+y) + \tan(x+z)} = \frac{a-b}{\tan(x+y) - \tan(x+z)}$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(x+y) + \tan(x+z)}{\tan(x+y) - \tan(x+z)} = \frac{\sin(2x+y+z)}{\sin(y-z)}$$

Do đó,

$$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(y-z) = \sin(2x+y+z)\sin(y-z) = \frac{1}{2}[\cos(2x+2z) - \cos(2x+2y)]$$

Tương tự, ta được :

$$\frac{b+c}{b-c}\sin^2(z-t) = \frac{1}{2}[\cos(2x+2t) - \cos(2x+2z)]$$

$$\frac{c+a}{c-a}\sin^2(t-y) = \frac{1}{2}[\cos(2x+2y) - \cos(2x+2t)]$$

Cộng các đẳng thức trên lại, ta có được điều phải chứng minh.

Bài 12: Cho

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a$$

Chứng minh rằng : $\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Để ý rằng :

$$\cos(x+y) = \cos[(x+y+z) - z] = \cos(x+y+z)\cos z + \sin(x+y+z)\sin z$$

Tương tự vậy, ta có :

$$\cos(y+z) = \cos(x+y+z)\cos x + \sin(x+y+z)\sin x$$

$$\cos(z+x) = \cos(x+y+z)\cos y + \sin(x+y+z)\sin y$$

Cộng 3 đẳng thức lại, ta được :

$$\begin{aligned} \text{VT} &= (\cos x + \cos y + \cos z)\cos(x+y+z) + (\sin x + \sin y + \sin z)\sin(x+y+z) \\ &= a\cos^2(x+y+z) + a\sin^2(x+y+z) = a \end{aligned}$$

Bài 13: Cho

$$\begin{cases} 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}, x \neq y, y \neq z \\ \frac{\cos x - \cos y}{\cos x - \cos z} = \frac{\sin^2 y \cos z}{\sin^2 z \cos y} \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}$$

Giải: Từ giả thuyết, ta có :

$$\cos x \cos y \sin^2 z - \cos x \sin^2 y \cos z = \sin^2 z \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 z$$

Hay

$\cos x\,(\cos y \sin^2 z - \sin^2 y \cos z) = (\sin z \cos y - \sin y \cos z)(\sin z \cos y + \sin y \cos z)$

$\Leftrightarrow \cos x\,[\cos y\,(1 - \cos^2 z) - 1(1 - \cos^2 y)\cos z] = \sin(z - y)\sin(z + y)$

$\Leftrightarrow \cos x\,(\cos y - \cos z)(1 + \cos y \cos z) = \cos^2 y - \cos^2 z$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\cos y + \cos z}{1 + \cos y \cos z}$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos y \cos z - \cos y - \cos z}{1 + \cos y \cos z + \cos y + \cos z} = \frac{(1 - \cos y)(1 - \cos z)}{(1 + \cos y)(1 + \cos z)}$$
$$= \tan^2\frac{y}{2}\tan^2\frac{z}{2}$$

Do $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}, x \neq y, y \neq z \Rightarrow \tan\frac{x}{2}, \tan\frac{y}{2}, \tan\frac{z}{2} > 0$

Khi đó,

$$\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.3.1. Cho 3 góc a, b, c thỏa điều kiện

$$\tan^2 a\tan^2 b+\tan^2 b\tan^2 c+\tan^2 c\tan^2 a+2\tan^2 a\tan^2 b\tan^2 c=1$$

Chứng minh : $\sin^2 a+\sin^2 b=\cos^2 c$

2.3.2. Cho $\cos(a+b)=k\cos(a-b)\,;k\neq -1$

Chứng minh rằng

$$\tan a\tan b=\frac{1-k}{1+k}$$

2.3.3. Cho $a+b+c=90^o$. Chứng minh :

$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=1-2\sin a\sin b\sin c$$

2.3.4. Cho $\cot a+\cot b+\cot c=\cot a\cot b\cot c$. Chứng minh

$$a+b+c=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

2.3.5. Chứng minh rằng nếu

$$\cos a=\frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}\ ;\ \cos b=\frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}}\ ;\ \cos(a+b)=\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$$

Thì $\tan^2 \mathrm{A}=\tan^2 \mathrm{B}+\tan^2 \mathrm{C}$

2.3.6. Cho

$$(\tan^6 20^o-33\tan^4 20^o+27\tan^2 20^o)^n-1\ \vdots\ 2^{2004}\,,n\in\mathbb{N}$$

Chứng minh rằng : $n\geq 2^{2002}$.

(Đề nghị Olympic 30-4, 2004)

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.3.1. Đặt $x=\sin^2 a\ ;y=\sin^2 b\ ;z=\sin^2 c$

Ta sẽ chứng minh $x+y+z=1$

Biến đổi từ giả thuyết sau :

$$\frac{x}{1-x}.\frac{y}{1-y}+\frac{y}{1-y}.\frac{z}{1-z}+\frac{z}{1-z}.\frac{x}{1-x}+2\frac{x}{1-x}.\frac{y}{1-y}.\frac{z}{1-z}=1$$

2.3.2. Từ giả thuyết, ta rút ra được

$$(1-k)\cos a\cos b=(1+k)\sin a\sin b$$

Chỉ cần chứng minh $\cos a\cos b\neq 0$ khi $k\neq -1$ thì ta có được điều phải chứng minh.

2.3.3. Để ý, từ giả thuyết, ta được :

$$\begin{cases}\sin a=\cos(b+c)\\ \cos a=\sin(b+c)\end{cases}$$

2.3.4. Điều cần chứng minh tương đương với $\cot(a+b+c)=0$ hay

$$0=\cot(a+b+c)=\frac{\cot a\cot b\cot c-\cot c-\cot a-\cot b}{\cot a\cot b-1+\cot c\,(\cot a+\cot b)}$$

2.3.5. Từ giả thuyết, ta biến đổi như sau :

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}$$

$\Longrightarrow (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) = (\cos a \cos b - \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C})^2$

$\Longrightarrow \left(1-\dfrac{\sin^2 \mathrm{B}}{\sin^2 \mathrm{A}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 \mathrm{C}}{\sin^2 \mathrm{A}}\right) = \sin^2 \mathrm{B} \sin^2 \mathrm{C}\left(\dfrac{1}{\sin^2 \mathrm{A}}-1\right)^2 = \sin^2 \mathrm{B} \sin^2 \mathrm{C} \cot^4 \mathrm{A}$

Chia 2 vế của đẳng thức cho $\sin^2 \mathrm{B} \sin^2 \mathrm{C}$, ta được :

$$\left(\frac{1}{\sin^2 \mathrm{B}}-\frac{1}{\sin^2 \mathrm{A}}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \mathrm{C}}-\frac{1}{\sin^2 \mathrm{A}}\right) = \cot^4 \mathrm{A}$$

$\Longrightarrow (\cot^2 \mathrm{B} - \cot^2 \mathrm{A})(\cot^2 \mathrm{C} - \cot^2 \mathrm{A}) = \cot^4 \mathrm{A}$

$\Longrightarrow \cot^2 \mathrm{B} \cot^2 \mathrm{C} = \cot^2 \mathrm{A}\,(\cot^2 \mathrm{B} + \cot^2 \mathrm{C})$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{\cot^2 \mathrm{A}} = \dfrac{1}{\cot^2 \mathrm{B}} + \dfrac{1}{\cot^2 \mathrm{C}}$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

2.3.6. Để ý ở bài **2.1.5** ta đã chứng minh $\tan^2 20^o$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$, nên $\tan^6 20^o - 33\tan^4 20^o + 27\tan^2 20^o = 3$

Do đó, giả thuyết tương đương với : $3^n - 1 \vdots 2^{2004}$

Lưu ý mệnh đề : $a|b \Leftrightarrow v_p(a) \le v_p(b), p$ nguyên tố.

Suy ra : $3^n - 1 \vdots 2^{2004} \Leftrightarrow v_2(3^n-1) \ge v_2(2^{2004}) = 2004.$

Mặt khác, ta có bổ đề :

$$v_2(a^n - b^n) = v_2\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right) + v_2(n)$$

Nên $v_2(3^n-1) = v_2(4) + v_2(n) \ge 2004$

Do đó, $v_2(n) \ge 2002 \Longrightarrow n \ge 2^{2002}$

Trong đó, $v_p(x) = a$ được hiểu là $a^p |\, x$ nhưng $a^{p+1} \nmid x$.

4. CHỨNG MINH BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN SỐ

- Khi gặp biểu thức $f(x)$ có chứa $\sin^2 x$; $\cos^2 x$**,** ta thường sử dụng các phương pháp sau :
- • Đặt ẩn phụ $a = \cos^2 x$; $b = \sin^2 x$ với kết quả sau : $a + b = 1; a^2 + b^2 = 1 - 2ab; a^3 + b^3 = 1 - 3ab; a^4 + b^4 = 1 + 2a^2b^2 - 4ab$ ...
- • Dùng các công thức hạ bậc
- • Đặt ẩn phụ theo $t = \tan^2 x$
- **Chú ý :** Đối với những bạn đọc đã biết về các khái niệm của đạo hàm các hàm số lượng giác, ta có thể dùng kiến thức

  Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathrm{D}$ thì $f(x)$ là hàm hằng với mọi $x \in \mathrm{D}$.

Bài 1: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$\mathrm{A} = \sin^4 x\,(3 - 2\sin^2 x) + \cos^4 x\,(3 - 2\cos^2 x)$

$\mathrm{B} = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

$\mathrm{C} = \cos^2 x + \cos^2(a + x) - 2\cos a\cos x\cos(a + x)$

$\mathrm{D} = \sin^2(a + x) + \sin^2(a - x) + 2\sin(a + x)\sin(a - x)\cos 2a$

$\mathrm{E} = \sin^8 x + \cos^8 x + 6\sin^4 x\cos^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Giải:

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)\\ &= 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x]\\ &\quad - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)\\ &= 3\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 1\end{aligned}$$

$\mathrm{B} = 3[a^4 - (1 - a)^4] + 4[(1 - a)^3 - 2a^3] + 6a^2\ ;\ a = \sin^2 x$

$= 3(4a^3 - 6a^2 + 4a - 1) + 4(-3a^3 + 3a^2 - 3a + 1) + 6a^2$

$= 12a^3 - 18a^2 + 12a - 3 - 12a^3 + 12a^2 - 12a + 4 + 6a^2 = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{C} &= \cos^2 x + \cos(a + x)\,[\cos(a + x) - 2\cos a\cos x]\\ &= \cos^2 x + \cos(a + x)\,[-\cos a\cos x - \sin a\sin x]\\ &= \cos^2 x - \cos(a + x)\cos(a - x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x)\\ &= \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D} &= \sin^2(a - x) + \sin(a + x)\,[\sin(a + x) + 2\sin(a - x)\cos 2a]\\ &= \sin^2(a - x) + \sin(a + x)\,[\sin(a + x) + \sin(3a - x) + \sin(-a - x)]\\ &= \sin^2(a - x) + \sin(a + x)\sin(3a - x)\\ &= \frac{1 - \cos(2a - 2x)}{2} + \frac{1}{2}\cos(-2a + 2x) - \frac{1}{2}\cos 4a = \frac{1}{2}(1 - \cos 4a)\\ &= \sin^2 2a\end{aligned}$$

$\mathrm{E} = \sin^8 x + \cos^8 x + 6\sin^4 x\cos^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Đặt $t = \tan^2 x$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{t}{t+1}; \cos^2 x = \frac{1}{t+1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E} = \frac{t^4}{(t+1)^4} + \frac{1}{(t+1)^4} + 6\frac{t^2}{(t+1)^4} + 4\frac{t}{(t+1)^2}\left[\frac{t^2}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1}{(t+1)^4} = 1$$

Bài 2: Chứng minh : Nếu $m\sin(a+b) = \cos(a-b)$, $a - b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, m \neq \pm 1$ thì biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1 - m\sin 2a} + \frac{1}{1 - m\sin 2b}$$

Giải: Ta có :

$$\mathrm{M} = \frac{2 - m(\sin 2a + \sin 2b)}{1 - m(\sin 2a + \sin 2b) + m^2 \sin 2a \sin 2b}$$

$$= \frac{2 - 2m\sin(a+b)\cos(a-b)}{1 - 2m\sin(a+b)\cos(a-b) + \frac{m^2}{2}[\cos 2(a-b) - \cos 2(a+b)]}$$

Mà $m\sin(a+b) = \cos(a-b)$ nên $\cos^2(a-b) = m^2\sin^2(a+b)$

Do đó,

$$\mathrm{M} = \frac{2[1 - m^2\sin^2(a+b)]}{1 - 2m^2\sin^2(a+b) + \frac{m^2}{2}[2\cos^2(a-b) - 2 + 2\sin^2(a+b)]}$$

$$= \frac{2[1 - m^2\sin^2(a+b)]}{1 - 2m^2\sin^2(a+b) + m^4\sin^2(a+b) - m^2 + m^2\sin^2(a+b)}$$

$$= \frac{2[1 - m^2\sin^2(a+b)]}{1 - m^2\sin^2(a+b) + m^2[m^2\sin^2(a+b) - 1]}$$

$$= \frac{2[1 - m^2\sin^2(a+b)]}{[1 - m^2\sin^2(a+b)](1 - m^2)} = \frac{2}{1 - m^2}$$

Do $a - b \neq k\pi$ nên $m\sin(a+b) = \cos(a-b) \neq \pm 1 \Rightarrow m^2\sin^2(a+b) \neq 1$.

Bài 3: Cho

$$f(x) = \sin^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + \cos^6 x$$

a. Chứng minh : $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
b. Tính giá trị của

$$f\left(\frac{\pi}{1998}\right)$$

(ĐH Hồng Đức 1998)

Giải: Ở bài này, ta có 2 cách chứng minh.

Cách 1: Ta chứng minh $f(x)$ là hàm hằng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có :

$$f(x) = \sin^6 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{1998}\right) = 1$$

Cách 2: Ta có :

$$f'(x) = 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + 3\sin 2x\cos 2x$$
$$= 6\sin x\cos x\,(\sin^4 x - \cos^4 x) + \frac{3}{2}\sin 4x$$
$$= 3\sin 2x\,(\sin^2 x - \cos^2 x) + \frac{3}{2}\sin 4x = -3\sin 2x\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 4x = 0$$

Như vậy,

$$f\left(\frac{\pi}{1998}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Bài 4: Tìm m để giá trị của hàm số sau không phụ thuộc vào biến số

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\sin^2 2x$$

Giải: Ta có :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$m(\sin^4 x + \cos^4 x) = m(1 - \sin^2 x \cos^2 x) = m\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$$

Vậy

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + m\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) + 2\sin^2 2x = 1 + m + \left(\frac{5}{4} - \frac{m}{4}\right)\sin^2 2x$$

Để $f(x)$ không phụ thuộc vào biến số thì $m = 5$, khi đó $f(x) = 6$.

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

2.4.1. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số

$A = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

$B = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$C = \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$D = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

$E = \frac{\sin x}{\sin x - \sqrt{\cot^2 x - \cos^2 x}} - \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x - 1}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$F = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

$$G = \sqrt[3]{\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos^2 x\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)} + \sqrt[3]{\sin^4 x \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 2x - \sin^2 x + \frac{1}{2}}$$

2.4.2. Tìm m để giá trị của hàm số sau không phụ thuộc vào biến số

$$f(x) = \sin(x + m) + \sin(x + 2m) + \sin x + a$$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

2.4.2. Để ý

$$f(x) = 2\sin(x + m)\cos m + \sin(x + m) + a = (1 + 2\cos m)\sin(x + m) + a$$

Do đó, để $f(x)$ không phụ thuộc vào biến số thì

$$\cos m = -\frac{1}{2}$$

CHƯƠNG 3
HÊ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. CÁC KÝ HIỆU CƠ BẢN

− A, B, C : các góc đỉnh A, B, C

− a, b, c : độ dài cạnh đối diện với đỉnh A, B, C

− h_a, h_b, h_c : độ dài đường cao hạ từ đỉnh A, B, C

− m_a, m_b, m_c : độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A, B, C

− l_a, l_b, l_c : độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A, B, C

− R : bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

− r : bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

− r_a, r_b, r_c : bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác đỉnh A, B, C

− p : nửa chu vi tam giác

− S : diện tích tam giác

II. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2R$$

Từ đó, ta có hệ quả sau :

$$a = 2R \sin \mathrm{A} \quad ; \quad b = 2R \sin \mathrm{B} \quad ; \quad c = 2R \sin \mathrm{C}$$

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COS

Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A} = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \mathrm{B} = (c - a)^2 + 4ca \sin^2 \frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C} = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}$$

Từ đó, ta có hệ quả sau để tính số đo góc của tam giác ABC :

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ ;\ \cos \mathrm{B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\ ;\ \cos \mathrm{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Từ hệ quả trên, ta có thêm được kết quả sau :

$$\mathrm{A} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b^2+c^2 < a^2\ ;\ \mathrm{B} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c^2+a^2 < b^2\ ;\ \mathrm{C} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2 < c^2$$

3. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ TAN

Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}\ ;\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}}\ ;\ \frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}}$$

4. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COT

Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$\cot \mathrm{A} + \cot \mathrm{B} + \cot \mathrm{C} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

5. ĐỊNH LÝ CÁC HÌNH CHIẾU

Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$a\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{A} = b\ ;\ a\cos \mathrm{B} + b\cos \mathrm{A} = c\ ;\ b\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{B} = a$$

6. CÔNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI TRUNG TUYẾN

Trong tam giác ABC, độ dài 3 đường trung tuyến được xác định bởi công thức :

$$m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} \Longrightarrow \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 = b^2 + c^2$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2+2a^2-b^2}{4} \Longrightarrow \frac{b^2}{2} + 2m_b^2 = c^2 + a^2$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \Longrightarrow \frac{c^2}{2} + 2m_c^2 = a^2 + b^2$$

Từ đó, ta có công thức về tổng bình phương của 3 đường trung tuyến trong tam giác ABC :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

7. CÔNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI PHÂN GIÁC TRONG

Trong tam giác ABC, độ dài 3 đường phân giác trong được xác định bởi công thức :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$l_b = \frac{2ca}{c+a}\cos\frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{2ca}{c+a}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$$

$$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

8. CÔNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CAO

Trong tam giác ABC, độ dài 3 đường cao được xác định bởi công thức :

$$h_a = \frac{2S}{a} \quad ; \quad h_b = \frac{2S}{b} \quad ; \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

9. CÔNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI BÁN KÍNH

a. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r = \frac{S}{p} = (p-a)\tan\frac{\mathrm{A}}{2} = (p-b)\tan\frac{\mathrm{B}}{2} = (p-c)\tan\frac{\mathrm{C}}{2}$$

b. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\mathrm{A}} = \frac{b}{2\sin\mathrm{B}} = \frac{c}{2\sin\mathrm{C}}$$

c. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP

$$r_a = p\tan\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{S}{p-a}$$

$$r_b = p\tan\frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{S}{p-b}$$

$$r_c = p\tan\frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{S}{p-c}$$

10. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Ta có công thức tính diện tích tam giác ABC bằng nhiều công thức khác nhau :

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} = \frac{1}{2}ca\sin \mathrm{B} = \frac{1}{2}ab\sin \mathrm{C} \\ r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ \frac{abc}{4R} \\ pr \end{cases}$$

<u>Lưu ý:</u> Công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ được nhà toán học và vật lý Heron[5] phát hiện nên thường được gọi là "Công thức Heron".

III. CÁC LOẠI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

- Để chứng minh loại toán này, chúng ta có nhiều phương pháp giải khác nhau, chẳng hạn như : biến đổi vế này thành vế kia, xuất phát từ một hệ thức đúng đã biết để suy ra đẳng thức cần chứng minh, chứng minh tương đương…
- Trong lúc chứng minh, ta chú ý một số kỹ thuật sau :
  - Sử dụng biến đổi lượng giác : sử dụng các công thức biến đổi tích thành tổng hoặc ngược lại, công thức hạ bậc, công thức cung có liên quan đặc biệt như :

$$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sin \mathrm{C} \;\; ; \;\; \cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = -\cos \mathrm{C} \;\; ; \;\; \sin\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right) = \cos\frac{\mathrm{C}}{2} \;\; ;$$

$$\cos\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right) = \sin\frac{\mathrm{C}}{2} \;\; ; \;\; \tan(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = -\tan \mathrm{C} \;\; ; \;\; \cot(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = -\cot \mathrm{C} \;\; ;$$

$$\tan\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right) = \cot\frac{\mathrm{C}}{2} \;\; ; \;\; \cot\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right) = \tan\frac{\mathrm{C}}{2}$$

  - Sử dụng định lý hàm số sin, hàm số cos : Ta thường dùng định lý này để biến đổi hệ thức phải chứng minh thành một hệ thức chỉ có hàm số lượng giác và dùng các công thức biến đổi lượng giác để chứng minh.
  - Sử dụng công thức tính diện tích : dùng để tìm mối quan hệ giữa các cạnh, góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp.

Trước hết, ta nên nhớ một số đẳng thức cơ bản trên trong tam giác nhằm giúp cho chúng ta sử dụng thành thạo các kỹ thuật chứng minh trong dạng toán này, đồng thời làm tăng "độ nhạy" khi gặp những bài toán phức tạp khác.

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức cơ bản trong tam giác ABC :

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

d. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$

e. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

f. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

g. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

h. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

i. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ (ĐH Tổng Hợp Tp.HCM 1995)

j. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

Giải:

a. Ta có :

$$VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

b. Ta có :

$$VT = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

c. Ta có :

$$VT = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C = 2\sin C\,[\cos(A-B) + \cos C]$$
$$= 2\sin C\,[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4\sin A\sin B\sin C$$

d. Ta có :

$$VT = 2\cos(A+B)\cos(A-B) - 1 + 2\cos^2 C = -2\cos C\,[\cos(A-B) - \cos C] - 1$$
$$= -2\cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 1 = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

e. Ta có :

$$VT = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$
$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C = 2 + \cos C\,[\cos(A-B) - \cos C]$$
$$= 2 + \cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

f. Ta có :

$$VT = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C\,[\cos(A-B) - \cos C]$$
$$= 1 - \cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

g. Ta có :

$$VT = \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) = 1 - \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

h. Ta có :

$$VT = \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 1 + \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - \sin^2\frac{C}{2}$$
$$= 2 + \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

i. Ta có : $A + B + C = \pi \Longrightarrow A + B = \pi - C$

$\Longrightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$

$\Longrightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$

$\Longrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

j. Ta có :

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Longrightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \Longrightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Longrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Bài 2: Chứng minh trong tam giác ABC, ta luôn có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B)$$

(ĐH Giao Thông Vận Tải 1995)

Giải: Ta có 2 cách chứng minh bài toán này

Cách 1: Ta có :

$$\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A = \sin B (\sin A \cos C + \sin C \cos A)$$
$$= \sin B \sin(A + C) = \sin^2 B$$

Tương tự :

$$\sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B = \sin^2 C$$
$$\sin C \sin A \cos B + \sin A \sin B \cos C = \sin^2 A$$

Cộng 3 đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Theo định lý hàm số cos, ta có :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B)$$

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

Suy ra :

$$4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 8R^2(\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B)$$

$$\Longrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Trong tam giác ABC, chứng minh đẳng thức

$$\tan nA + \tan nB + \tan nC = \tan nA \tan nB \tan nC \ , n \in \mathbb{N}$$

(ĐH Y Hải Phòng 1998)

Giải: Ta có : $nA + nB + nC = n\pi \Longrightarrow nA + nB = n\pi - nC$

$$\Longrightarrow \tan(nA + nB) = \tan(n\pi - nC) = -\tan nC$$

$$\Longrightarrow \frac{\tan nA + \tan nB}{1 - \tan nA \tan nB} = -\tan nC$$

$$\Longrightarrow \tan nA + \tan nB + \tan nC = \tan nA \tan nB \tan nC$$

Bài 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

a. $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$

(ĐH Ngoại Thương Hà Nội 1998)

b. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}$

(ĐH Ngoại Thương Tp.HCM 2001)

c. $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

(ĐH Ngoại Ngữ Hà Nội 1998)

d. $\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=2$

(ĐHQG Hà Nội 1998)

e. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

(ĐH Dược Hà Nội 1998)

Giải:

a. Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}=\frac{2}{\sin A}\ ;\ \tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}=\frac{2}{\sin B}\ ;\ \tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{2}{\sin C}$$

Cộng 3 đẳng thức trên và thêm hệ thức sẵn có, ta có được điều phải chứng minh.

b. Ta có :

$$\mathrm{VT}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Mặt khác :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1}{2}(\cos B+\cos C)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos A+\cos B+\cos C)$$

Tương tự, ta có :

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{4}(1-\cos B+\cos C+\cos A)$$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(1-\cos C+\cos A+\cos B)$$

Suy ra

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(3+\cos A+\cos B+\cos C)$$

Ta xét :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)\right]=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

Vậy ta đã có được điều phải chứng minh.

c. Ta có :

$$\text{VT}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-\frac{b}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{c}{2R}}$$

$$=\frac{(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)}{2c^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

d. Ta có :

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

Cộng 3 đẳng thức trên lại, ta có :

$$\mathrm{VT} = 3 - \left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)$$

Mà

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Nên VT = 2.

e. Theo định lý cos, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\sin A\cot A = b^2 + c^2 - 4S\cot A$$

Tương tự, ta có :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S\cot B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot C$$

Cộng 3 đẳng thức trên ta được :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$
$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

Bài 5: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

a. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$

(Học Viện Quan Hệ Quốc Tế 1998)

b. $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

(Học Viện Quan Hệ Quốc Tế 2000)

c. $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

(Học Viện Ngân Hàng 2000)

Giải:

a. Ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B - \sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = -4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\\ &= 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\end{aligned}$$

Vậy

$$VT = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$$

b. Ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Do đó, điều cần chứng minh tương đương với :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) + \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{A+B+C}{2}\right) = 1$$

Điều này hiển nhiên đúng, ta có điều phải chứng minh.

c. Ở câu a, ta đã chứng minh :

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Ta xét :

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B - \cos C + 1 &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

Do đó,

$$VT = \frac{4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Bài 6: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a. $a^3\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})+b^3\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})+c^3\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0$

b. $\dfrac{a\sin\mathrm{A}+b\sin\mathrm{B}+c\sin\mathrm{C}}{a\cos\mathrm{A}+b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C}}=\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C}$

c. $(a-b)\tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}\tan\dfrac{\mathrm{B}}{2}+(b-c)\tan\dfrac{\mathrm{B}}{2}\tan\dfrac{\mathrm{C}}{2}+(c-a)\tan\dfrac{\mathrm{C}}{2}\tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}=0$

Giải:

a. Ta có :

$$\sin^3\mathrm{A}\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})=\sin^2\mathrm{A}\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})=-\frac{1}{4}(1-\cos2\mathrm{A})(\cos2\mathrm{B}-\cos2\mathrm{C})$$
$$=\frac{1}{4}(\cos2\mathrm{C}-\cos2\mathrm{B}+\cos2\mathrm{A}\cos2\mathrm{B}-\cos2\mathrm{C}\cos2\mathrm{A})$$

Tương tự, ta có :

$$\sin^3\mathrm{B}\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})=\frac{1}{4}(\cos2\mathrm{A}-\cos2\mathrm{C}+\cos2\mathrm{B}\cos2\mathrm{C}-\cos2\mathrm{A}\cos2\mathrm{B})$$
$$\sin^3\mathrm{C}\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{1}{4}(\cos2\mathrm{B}-\cos2\mathrm{A}+\cos2\mathrm{C}\cos2\mathrm{A}-\cos2\mathrm{C}\cos2\mathrm{B})$$

Cộng 3 đẳng thức trên, ta được :

$$\sin^3\mathrm{A}\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})+\sin^3\mathrm{B}\sin(\mathrm{C}-\mathrm{A})+\sin^3\mathrm{C}\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0$$

Vậy theo định lý hàm số sin, ta có điều phải chứng minh.

b. Ta có :

$$\sin2\mathrm{A}+\sin2\mathrm{B}+\sin2\mathrm{C}=4\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$$

Do đó, theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\mathrm{VT}=\frac{2R(\sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C})}{2R(\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{C})}=\frac{2(\sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C})}{\sin2\mathrm{A}+\sin2\mathrm{B}+\sin2\mathrm{C}}$$
$$=\frac{\sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}}{2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}=\frac{\sin\mathrm{A}}{2\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}+\frac{\sin\mathrm{B}}{2\sin\mathrm{C}\sin\mathrm{A}}+\frac{\sin\mathrm{C}}{2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}$$
$$=\frac{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{2\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}+\frac{\sin(\mathrm{C}+\mathrm{A})}{2\sin\mathrm{C}\sin\mathrm{A}}+\frac{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}$$
$$=\frac{1}{2}(\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C})+\frac{1}{2}(\cot\mathrm{C}+\cot\mathrm{A})+\frac{1}{2}(\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B})$$
$$=\cot\mathrm{A}+\cot\mathrm{B}+\cot\mathrm{C}$$

c. Ta có :

$$\mathrm{VT}=\frac{a-b}{\tan\frac{\mathrm{C}}{2}}+\frac{b-c}{\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}+\frac{c-a}{\tan\frac{\mathrm{B}}{2}}$$

Mặt khác, ta có :

$$a = p - b + p - c = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) ; b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a - b = r\left(\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2}\right) \Rightarrow (a-b)\cot\frac{C}{2} = r\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2}\right)$$

Tương tự :

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} = r\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)$$
$$(c-a)\cot\frac{B}{2} = r\cot\frac{B}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \cot\frac{C}{2}\right)$$

Cộng 3 đẳng thức trên, ta có được điều phải chứng minh.

Bài 7: Với $n \in \mathbb{Z}$. Ta có một số đẳng thức tổng quát trong tam giác ABC

a. $\sin(2n+1)A + \sin(2n+1)B + \sin(2n+1)C$
$$= (-1)^n 4\cos(2n+1)\frac{A}{2}\cos(2n+1)\frac{B}{2}\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

b. $\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n+1}4\sin nA \sin nB \sin nC$

c. $\sin^2 nA + \sin^2 nB + \sin^2 nC = 2 + (-1)^{n+1}2\cos nA\cos nB\cos nC$

d. $\cos(2n+1)A + \cos(2n+1)B + \cos(2n+1)C$
$$= 1 + (-1)^n 4\sin(2n+1)\frac{A}{2}\sin(2n+1)\frac{B}{2}\sin(2n+1)\frac{C}{2}$$

e. $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC = -1 + (-1)^n 4\cos nA\cos nB\cos nC$

f. $\cos^2 nA + \cos^2 nB + \cos^2 nC = 1 + (-1)^n 2\cos nA\cos nB\cos nC$

Giải:

a. Ta có :

$$\text{VT} = 2\sin\frac{(2n+1)A + (2n+1)B}{2}\cos\frac{(2n+1)A - (2n+1)B}{2} + 2\sin(2n+1)\frac{C}{2}\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$
$$= 2\sin(2n+1)\frac{A+B}{2}\cos(2n+1)\frac{A-B}{2} + 2\sin(2n+1)\frac{C}{2}\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

Ta xét :

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow (2n+1)\frac{A+B}{2} = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(2n+1)\frac{A+B}{2} = \sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-(2n+1)\frac{C}{2}\right)$$
$$= (-1)^n\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

Tương tự vậy, ta có :

$$(2n+1)\frac{C}{2} = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \sin(2n+1)\frac{C}{2} = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-(2n+1)\frac{A+B}{2}\right) = (-1)^n\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

Suy ra

$$VT = 2.(-1)^n\cos(2n+1)\frac{C}{2}\left[\cos(2n+1)\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos(2n+1)\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$
$$= (-1)^n 4\cos(2n+1)\frac{A}{2}\cos(2n+1)\frac{B}{2}\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

b. Ta có :

$$VT = 2\sin n(A+B)\cos n(A-B) + 2\sin nC\cos nC$$

Ta thấy :

$$A+B=\pi-C \Rightarrow n(A+B) = n\pi - nC$$
$$\Rightarrow \sin n(A+B) = \sin(n\pi-nC) = (-1)^{n+1}\sin nC$$

Và

$$nC = n\pi - n(A+B) \Rightarrow \cos nC = \cos\big(n\pi - n(A+B)\big) = (-1)^n\cos n(A+B)$$

Suy ra

$$VT = 2(-1)^{n+1}\sin nC\cos n(A-B) + 2(-1)^n\cos n(A+B)\sin nC$$
$$= 2(-1)^n\sin nC\,[\cos n(A+B)-\cos n(A-B)]$$
$$= (-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC$$

c. Ta có :

$$VT = \frac{1-\cos 2nA}{2}+\frac{1-\cos 2nB}{2}+1-\cos^2 nC$$

$$= 2-\frac{1}{2}(\cos 2nA+\cos 2nB)-\cos^2 nC$$
$$= 2-\cos n(A+B)\cos n(A-B)-\cos^2 nC$$
$$= 2-(-1)^n\cos nC\,[\cos n(A-B)+\cos n(A+B)]$$
$$= 2+(-1)^{n+1}2\cos nA\cos nB\cos nC$$

d. Ta có :

$$VT = 2\cos(2n+1)\frac{A+B}{2}\cos(2n+1)\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2(2n+1)\frac{C}{2}$$

Mà

$$(2n+1)\frac{A+B}{2} = (2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \cos(2n+1)\frac{A+B}{2}=\cos(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-(2n+1)\frac{C}{2}\right)$$
$$=-1.(-1)^{n-1}\sin(2n+1)\frac{C}{2}=(-1)^n\sin(2n+1)\frac{C}{2}$$

Và

$$(2n+1)\frac{C}{2}=(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow \sin(2n+1)\frac{C}{2}=\sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-(2n+1)\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=(-1)^n\cos(2n+1)\frac{A+B}{2}$$

Suy ra

$$VT=1+2(-1)^n\sin(2n+1)\frac{C}{2}\left[\cos(2n+1)\frac{A-B}{2}-\cos(2n+1)\frac{A+B}{2}\right]$$
$$=1+(-1)^n4\sin(2n+1)\frac{A}{2}\sin(2n+1)\frac{B}{2}\sin(2n+1)\frac{C}{2}$$

e. Ta có :

$$VT=2\cos n(A+B)\cos n(A-B)+2\cos^2 nC-1$$
$$=2\cos(n\pi-nC)\cos n(A-B)+2\cos^2 nC-1$$
$$=-1+2(-1)^n\cos nC\,[\cos n(A-B)+\cos n(A+B)]$$
$$=-1+(-1)^n4\cos nA\cos nB\cos nC$$

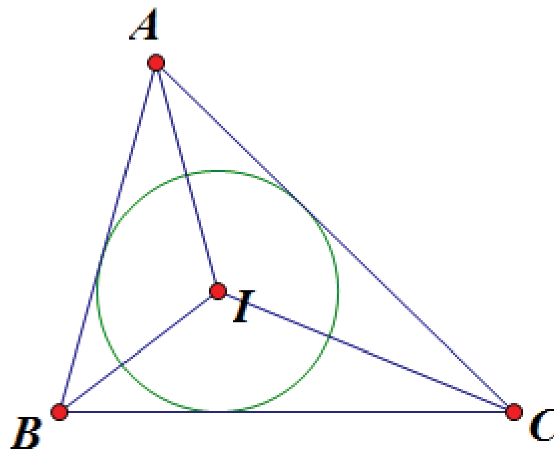
f. Ta có :

$$VT=\frac{1+\cos 2nA}{2}+\frac{1+\cos 2nB}{2}+\cos^2 nC=1+\frac{1}{2}(\cos 2nA+\cos 2nB)+\cos^2 nC$$
$$=1+\cos n(A+B)\cos n(A-B)+\cos^2 nC$$
$$=1+\cos(n\pi-nC)\cos n(A-B)+\cos^2 nC$$
$$=1+(-1)^n\cos nC\cos n(A-B)+(-1)^n\cos nC\cos n(A+B)$$
$$=1+(-1)^n\cos\ nC\,[\cos n(A-B)+\cos n(A+B)]$$
$$=1+(-1)^n2\cos nA\cos nB\cos nC$$

Bài 8: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt $x=\widehat{BIC}$, $y=\widehat{AIC}$, $z=\widehat{AIB}$. Chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin x\sin y\sin z$$

Giải:



Ta có :

$$x = 180^o - \frac{B+C}{2} = 90^o + \frac{A}{2}, y = 90^o + \frac{B}{2}, z = 90^o + \frac{C}{2}$$

Suy ra

$$4\sin x \sin y \sin z = 4\sin\left(90^o + \frac{A}{2}\right)\sin\left(90^o + \frac{B}{2}\right)\sin\left(90^o + \frac{C}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= \sin A + \sin B + \sin C$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có 3 góc A, B, C theo thứ tự tạo thành cấp số nhân công bội $q = 2$. Chứng minh

a. $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = 8$

b. $\cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{8}$

c. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$

d. $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Giải:

Từ giả thuyết, ta suy ra

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{7} \\ B = \frac{2\pi}{7} \\ C = \frac{4\pi}{7} \end{cases}$$

a. Ta có :

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \cot^2 A + \cot^2 2A + \cot^2 4A + 3$$

$= (\cot^2 A - 1) + (\cot^2 2A - 1) + (\cot^2 4A - 1) + 6$
$= \dfrac{\cos 2A}{\sin^2 A} + \dfrac{\cos 4A}{\sin^2 2A} + \dfrac{\cos 8A}{\sin^2 4A} + 6$
$= \dfrac{2\cos 2A \cos A}{2\sin^2 A \cos A} + \dfrac{2\cos 4A \cos 2A}{2\sin^2 2A \cos 2A} + \dfrac{2\cos 8A \cos 4A}{2\sin^2 4A \cos 4A} + 6$
$= 2\cot 2A \cot A + 2\cot 4A \cot 2A + 2\cot 8A \cot 4A + 6$
$= 2(\cot B \cot A + \cot C \cot B + \cot A \cot C) + 6$
(vì $\cot 8A = \cot(\pi + A) = \cot A$)
Mặt khác, trong tam giác ABC ta luôn có :

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Nên $VT = 8$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.
b. Ta có :

$$\cos A \cos B \cos C = \cos A \cos 2A \cos 4A = \frac{\sin 2A}{2\sin A}.\frac{\sin 4A}{2\sin 2A}.\frac{\sin 8A}{2\sin 4A} = \frac{\sin 8A}{8\sin A} = -\frac{1}{8}$$

(vì $\sin 8A = \sin(\pi + A) = -\sin A$)
Vậy ta có điều phải chứng minh.
c. Trong tam giác ABC, ta luôn có :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C = 1 - 2\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.
d. Theo định lý hàm số sin, điều cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}$$

Ta có :

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 10:

a. Cho tam giác ABC, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng

$$2b = a + c \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$$

(ĐH Cần Thơ 1998)

b. Chứng minh rằng : trong tam giác ABC nếu $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự tạo thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành cấp số cộng.

(ĐH Thương Mại Hà Nội 2000)

c. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 = 4R^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\tan A \tan B + 1}{\tan A \tan B - 1} = \tan^2 C$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải:

a. Ta có giả thuyết tương đương với

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A + C}{2} = \cos\frac{A - C}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A + C}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A - C}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$$

Theo định lý hàm số sin, ta có điều phải chứng minh.

b. $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot A + \cot C = 2\cot B$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A + C)}{\sin A \sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = 2\sin A \sin C \cos B$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos B\,[\cos(A - C) + \cos B]$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 B = -\cos(A + C)\cos(A - C) + \cos^2 B$$

$\Leftrightarrow \sin^2 B = 1 - \sin^2 B - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2C)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 B = 1 - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 C)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C$

Theo định lý hàm số sin, ta có điều phải chứng minh.

c. Theo định lý hàm số sin, ta suy ra

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = 4R^2$$

Áp dụng tính chất tỷ lệ thức, ta có :

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C} = 4R^2$

$\Longrightarrow \frac{4R^2}{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C} = 4R^2$

$\Longrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \sin^2 C$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) = \sin^2 C$

$\Leftrightarrow \cos C \cos(A - B) = \sin^2 C$

Ở đẳng thức này ta thấy được $\cos C, \cos(A - B) \neq 0$ nên

$$\frac{\cos(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{\sin C}{\cos C} \Leftrightarrow \frac{\cos A \cos B + \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \tan C$$

Giả sử $\cos A \cos B = 0$ thì $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 0$ hay $\cos(A - B) = \cos C$. Khi đó $A = 90^o, B = C = 45^o$

Mặt khác, do $\cos C \neq 0$ nên $\sin A \sin B \neq \cos A \cos B$.

Đến đây, ta có được mâu thuẫn. Do đó :

$$\tan C = \frac{1 + \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} \Leftrightarrow \frac{1 + \tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\tan C\,(\tan A + \tan B)}{1 - \tan A \tan B}$$

(vì $\sin A \sin B \neq \cos A \cos B \Longrightarrow \tan A \tan B \neq 1$)

$\Leftrightarrow \frac{1 + \tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \tan C \tan(A + B) = \tan^2 C$

<u>Bài 11:</u> Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh các đẳng thức sau :

a. $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

b. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2(2 + 2\cos A \cos B \cos C)$

c. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$

d. $a=\dfrac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

e. $IA.IB.IC=4Rr^2$

Giải:

a. Ta cần chứng minh :

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Thật vậy, ta có :

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=pr\Longrightarrow r=\frac{ab\sin C}{a+b+c}$$

Mà theo định lý hàm số sin, ta được :

$$r=\frac{ab\sin C}{a+b+c}=\frac{2R\sin A\,2R\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

Suy ra

$$\frac{r}{R}=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$\begin{cases}\sin A\sin B\sin C=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{cases}$$

Do đó,

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Longrightarrow 1+\frac{r}{R}=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos A+\cos B+\cos C$$

b. Ta có :

$$VT=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=3R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)=3R^2(2+2\cos A\cos B\cos C)$$

c. Ta có :

$$\mathrm{VT} = \frac{a+b}{ab} l_c + \frac{b+c}{bc} l_a + \frac{c+a}{ca} l_b$$

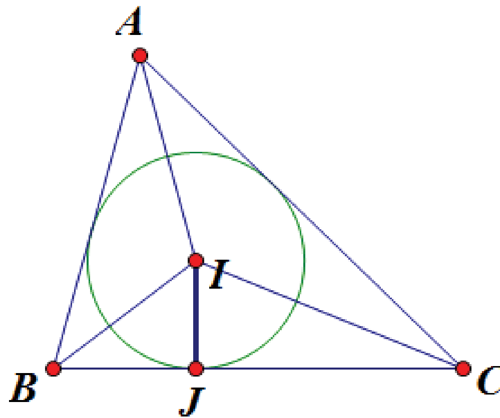
$$= \frac{a+b}{ab} . \frac{2ab}{a+b} \cos\frac{\mathrm{C}}{2} + \frac{b+c}{bc} . \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{c+a}{ca} . \frac{2ca}{c+a} \cos\frac{\mathrm{B}}{2} = \mathrm{VP}$$

d. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{a}{p} = 2 . \frac{2R\sin\mathrm{A}}{a+b+c} = \frac{4R\sin\mathrm{A}}{2R(\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C})} = \frac{8R\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}{8R\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

e.



Ta thấy tam giác IBJ vuông tại J nên

$$\mathrm{IB} = \frac{\mathrm{IJ}}{\sin\frac{\mathrm{B}}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\mathrm{B}}{2}}$$

Tương tự, ta có :

$$\mathrm{IC} = \frac{r}{\sin\frac{\mathrm{C}}{2}} \quad ; \quad \mathrm{IA} = \frac{r}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{VT} = \frac{r^3}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$\frac{r}{4R} = \sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}$$

Nên

$$\mathrm{VT} = \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2$$

TOANMATH.com

Bài 12: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng ta luôn có :

$$p^2 + r^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r)$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

Giải:

Trước hết ta sẽ chứng minh : $2R(h_a + h_b + h_c - 2r) = ab + bc + ca - 4Rr$

Thật vậy ta có :

$$2R(h_a + h_b + h_c) = 2R\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}\right) = \frac{4RS(ab + bc + ca)}{abc} = a + b + c$$

$$\Rightarrow 2R(h_a + h_b + h_c - 2r) = ab + bc + ca - 4Rr \Rightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = ab + bc + ca$$

Lại có :

$$\sin \mathrm{A} = \frac{2\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}{1 + \tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}} \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{\frac{2r}{p - a}}{1 + \frac{r^2}{(p - a)^2}}$$

$$\Rightarrow a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4pRr = 0$$

Tương tự thì ta cũng có :

$$b^3 - 2pb^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)b - 4pRr = 0$$

$$c^3 - 2pc^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)c - 4pRr = 0$$

Vậy a, b, c là nghiệm của phương trình sau :

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0$$

Theo định lý Viète thì :

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 13: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có :

a. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

b. $r_a + r_b + r = 4R\cos C + r_c$

c. $r_a r_b r_c = rp^2$

d. $r^2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = S^2$

e. $(b+c)^4 - 2(a^2 + 2l_a^2)(b+c)^2 + a^2(a^2 + 4h_a^2) = 0$

Giải:

a. Ta có :

$$r_a + r_b + r_c - r = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right) = S\left[\frac{p-a+p-b}{(p-a)(p-b)} + \frac{p-p+c}{p(p-c)}\right]$$
$$= Sc\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{p(p-c)}\right] = Sc\,\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{c}{S}[2p^2 - p(a+b+c) + ab] = \frac{abc}{S} = 4R$$

b. Ta có :

$$r_a + r_b + r - r_c = Sc\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)} - \frac{1}{p(p-c)}\right] = \frac{c}{S}[p(a+b+c) - ab]$$
$$= \frac{c}{S}\left[\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) - ab\right]$$
$$= \frac{2R^2c}{\frac{abc}{4R}}[(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) - 2\sin A\sin B]$$
$$= \frac{8R^3}{ab}\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - 2\sin A\sin B\right)$$
$$= \frac{8R^3}{ab}\left(4\cos^2\frac{C}{2}\sin A\sin B - 2\sin A\sin B\right) = \frac{8R^3}{4R^2}\left(4\cos^2\frac{C}{2} - 2\right)$$
$$= 4R\cos C$$

c. Ta có :

$$\text{VT} = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2pr}{\frac{S^2}{p}} = rp^2$$

d. Ta có :

$$\text{VT} = S^2r^2\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)}\right]$$

$$= S^2r^2\frac{p-a+p-b+p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2r^2p}{\frac{S^2}{p}} = p^2r^2 = S^2$$

e. Ta có :

$$\text{VT} = (b+c)^4 - 2a^2(b+c)^2 + a^4 - 4l_a^2(b+c)^2 + 4a^2h_a^2$$
$$= [(b+c)^2 - a^2]^2 - 4(b+c)^2.\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\frac{\text{A}}{2} + 16S^2$$
$$= (b+c-a)^2(b+c+a)^2 - 4(b+c)^2.\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}.\frac{1+\cos\text{A}}{2} + 16S^2$$
$$= (b+c-a)^2(b+c+a)^2 - 8b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) + 16S^2$$
$$= (b+c-a)^2(b+c+a)^2 - 4bc[(b+c)^2 - a^2] + 16S^2$$
$$= (b+c-a)^2(b+c+a)^2 - 4bc(b+c-a)(b+c+a) + 16S^2$$
$$= (b+c-a)(b+c+a)(b-c-a)(b-c+a) + 16S^2$$

Mặt khác, theo công thức Heron, ta có :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a+b+c}{2}.\frac{b+c-a}{2}.\frac{a+c-b}{2}.\frac{a+b-c}{2}$$

Suy ra $16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$

Vậy $\text{VT} = 0$.

Bài 14: Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta luôn có

a. $\tan\frac{\text{B}}{2}\tan\frac{\text{C}}{2} = 1 - \frac{2r}{h_a} = \frac{1}{\frac{2r_a}{h_a}+1}$

b. $(p-a)^2\sin\text{A} + (p-b)^2\sin\text{B} + (p-c)^2\sin\text{C}$

$$= r(2R-r)(\sin\text{A} + \sin\text{B} + \sin\text{C})$$

Giải:

a. Ta có :

$$1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{2S}{p}.\frac{a}{2S} = 1 - \frac{2a}{a+b+c} = 1 - \frac{4R\sin\text{A}}{2R(\sin\text{A}+\sin\text{B}+\sin\text{C})}$$
$$= 1 - \frac{8R\sin\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{A}}{2}}{8R\cos\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}}{2}} = 1 - \frac{\cos\frac{\text{B}+\text{C}}{2}}{\cos\frac{\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Ta lại có :

$$\frac{2r_a}{h_a} = \frac{2S}{p-a}.\frac{a}{2S} = \frac{a}{p-a} = \frac{2a}{b+c-a} = \frac{4R\sin A}{2R(\sin B + \sin C - \sin A)} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - 1$$

Suy ra

$$\frac{1}{\frac{2r_a}{h_a}+1} = \frac{1}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - 1 + 1} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

b. Ta có :

$$\begin{aligned}\text{VP} &= r(2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C) - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)\\ &= r(a+b+c) - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)\\ &= 2pr - r^2(\sin A + \sin B + \sin C) = 2S - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)\end{aligned}$$

Do đó, điều cần chứng minh tương đương với

$$(p-a)^2\sin A + (p-b)^2\sin B + (p-c)^2\sin C = 2S - r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow [(p-a)^2 + r^2]\sin A + [(p-b)^2 + r^2]\sin B + [(p-c)^2 + r^2]\sin C = 2S$$

Mặt khác, ta thấy :

$$[(p-a)^2 + r^2]\sin A = (p-a)^2\sin A\left(1 + \tan^2\frac{A}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}(p-a)^2$$

$$= 2\tan\frac{A}{2}(p-a).\frac{S}{p\tan\frac{A}{2}} = 2S.\frac{p-a}{p} = 2S.\frac{b+c-a}{b+c+a}$$

$$= 2S.\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C + \sin A} = 2S.\frac{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 2S\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Tương tự vậy, ta có :

$$[(p-b)^2 + r^2]\sin B = 2S\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$[(p-c)^2 + r^2]\sin C = 2S\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

Mà ta lại có :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

Vậy cộng 3 đẳng thức trên, ta có được điều phải chứng minh.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

3.1.1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$

b. $\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$
$=1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$

c. $(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=2p$

d. $ab(a+b)\cos C+bc(b+c)\cos A+ca(c+a)\cos B=a^3+b^3+c^3$

e. $\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C=1+3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

3.1.2. Cho tam giác ABC, $BC=a, CA=b, AB=c$ và

$$5\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

Chứng minh rằng $3c=2(a+b)$.

(ĐH Cần Thơ 2000)

3.1.3. Cho tam giác ABC có :

$$\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$$

Chứng minh rằng : $2\cot A=\cot B+\cot C$.

(ĐH Tổng Hợp 1995)

3.1.4. Cho tam giác ABC có $l_c=l_b$. Chứng minh rằng $a=b$.

(Định lý Steiner[(6)] – Lehmus[(7)])

3.1.5. Cho tam giác ABC thỏa hệ thức :

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng :

a. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

b. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$

(ĐH Dược Hà Nội 1998)

3.1.6. Cho tam giác ABC có $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng tam giác ABC nhọn và $\tan B \tan C = 2\sin^2 A$.

3.1.7. Trong tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $r_a = r + 4R\sin^2\frac{A}{2}$

b. $\sin\frac{A}{2} = \frac{r_a}{\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}}$

c. $\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}$

d. $\frac{\cos A}{b\cos C + c\cos B} + \frac{\cos B}{a\cos C + c\cos A} + \frac{\cos C}{b\cos A + a\cos B} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2R}$

e. $(b - c)(p - a)\cos A + (c - a)(p - b)\cos B + (a - b)(p - c)\cos C = 0$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

3.1.1.

a. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A) = R^2(\sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A)$$
$$= 2R^2\sin A\sin B\,(\sin A\cos B + \sin B\cos A) = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin C = S$$

b. Cần chứng minh

$$\frac{\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4}}{1 - \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}} = \frac{1 - \tan\frac{C}{4}}{1 + \tan\frac{C}{4}}$$

c. Áp dụng định lý các hình chiếu

d. Áp dụng định lý hàm số cos

e. Sử dụng công thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

3.1.2. Để ý, từ giả thuyết ta có :

$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin C=2(\sin A+\sin B)$$

3.1.3. Để ý :

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{m_b^2}{m_c^2}=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{2(a^2+b^2)-c^2}\Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2$$

3.1.4. Ta sử dụng công thức về độ dài phân giác trong :

$$l_b=l_c\Leftrightarrow\frac{2ca}{c+a}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b+c)[(a+b+c)(a^2+2bc)+2abc](b-c)=0\Leftrightarrow b=c$$

3.1.5.

a. Để ý :

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

b. Sử dụng đẳng thức :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

3.1.6. Từ giả thuyết, ta có $a=\max\{a,b,c\}$. Do đó

$$\begin{cases}b^2<a^2\\c^2<a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^4<a^2b^2\\c^4<a^2c^2\end{cases}\Rightarrow a^4=b^4+c^4<a^2(b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow a^2<b^2+c^2\Rightarrow\cos A>0$$

$$\tan B\tan C=\frac{4a^2bc\sin B\sin C}{a^4-(b^2-c^2)^2}=2a^2\frac{\sin B}{b}.\frac{\sin C}{c}=2\sin^2 A$$

3.1.7.

a. Ta có :

$$r_a-r=p\tan\frac{A}{2}-(p-a)\tan\frac{A}{2}=a\tan\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}=4R\sin^2\frac{A}{2}$$

b. Để ý :

$$VP=\frac{p\tan\frac{A}{2}}{p\sqrt{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}}=\sin\frac{A}{2}$$

c. Để ý :

$$VP=1+\frac{r-r_a}{2R}=1-\frac{4R\sin^2\frac{A}{2}}{2R}=\cos A$$

d. Áp dụng định lý các hình chiếu.

e. Ta có :

$$(b-c)(p-a)\cos A=2R(\sin B-\sin C)\frac{r}{\tan\frac{A}{2}}\cos A$$

$$=2Rr.2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.\cos A=4Rr\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos A$$

$$=2Rr(\cos A\cos C-\cos A\cos B)$$

Tương tự vậy, ta có :

$$(c-a)(p-b)\cos B=2Rr(\cos A\cos B-\cos C\cos B)$$

$$(a-b)(p-c)\cos C=2Rr(\cos B\cos C-\cos A\cos C)$$

2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

- Ngoài việc nhớ các đẳng thức cơ bản và áp dụng các kỹ thuật biến đổi để chứng minh đẳng thức lượng giác vào dạng toán này, thì ta cũng nên nắm được một số kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức, chẳng hạn như :
    - Dùng các quan hệ giữa cạnh và góc :

Trong tam giác ABC, ta có :

$$a < b < c \Leftrightarrow \mathrm{A} < B < C \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin \mathrm{A} < \sin \mathrm{B} < \sin \mathrm{C} \\ \cos \mathrm{A} > \cos \mathrm{B} > \cos \mathrm{C} \end{cases}$$

Từ tính chất trên, ta có được kết quả sau :

$$(a-b)(\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B}) \geq 0 \Leftrightarrow a \sin \mathrm{A} + b \sin \mathrm{B} \geq a \sin \mathrm{B} + b \sin \mathrm{A}$$

$$(a-b)(\cos \mathrm{A} - \cos \mathrm{B}) \leq 0 \Leftrightarrow a \cos \mathrm{A} + b \cos \mathrm{B} \leq a \cos \mathrm{B} + b \cos \mathrm{A}$$

- Dùng các bất đẳng thức cổ điển :

i. Bất đẳng thức Cauchy[(8)] :

Cho n số không âm : $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$ thì :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

ii. Bất đẳng thức Bunyakovsky[(9)] :

Cho hai dãy số thực : $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$ thì :

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

iii. Bất đẳng thức Chebyshev[(10)] :

Cho hai dãy số thực tăng : $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ thì :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} . \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}$$

Cho dãy số thực tăng : $a_1 \leq a_2 \leq \ ... \leq a_n$ và dãy số thực giảm $b_1 \geq b_2 \geq \ ... \geq b_n$ thì :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ ... + a_n}{n} . \frac{b_1 + b_2 + \ ... + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ ... + a_n b_n}{n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \ ... \ = a_n \\ b_1 = b_2 = \ ... \ = b_n \end{cases}$

iv. Bất đẳng thức Bernoulli[11] :

Với $a \geq -1$ thì với mọi $\in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

v. Bất đẳng thức Jensen[12] :

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $\mathrm{D} = (a, b)$

Nếu với mọi $x \in \mathrm{D}$, $f''(x) > 0$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathrm{D}$ thì :

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ ... \ + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ ... \ + x_n}{n}\right)$$

Nếu với mọi $x \in \mathrm{D}$, $f''(x) < 0$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathrm{D}$ thì :

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ ... \ + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ ... \ + x_n}{n}\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ ... \ = x_n$

- Dùng đạo hàm để áp dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Tương tự như ở dạng chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác, ở dạng này trước hết ta cũng cần nắm rõ một số bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác.

Bài 1: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

c. $\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

d. $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$

e. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$

f. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

g. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

h. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Giải:

a. Ta có :

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

Do $0 \le \frac{A+B}{2} \le \pi$ và $-\frac{\pi}{2} \le \frac{A-B}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{A+B}{2} \ge 0$ và $0 \le \cos\frac{A-B}{2} \le 1$

Vậy ta chứng minh được

$$\sin A + \sin B \le 2\sin\frac{A+B}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$\sin C + \sin\frac{\pi}{3} \le 2\sin\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

Suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \le 2\left[\sin\frac{A+B}{2} + \sin\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right] \le 4\sin\left(\frac{A+B}{4} + \frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \le 4\sin\frac{\pi}{3}$$

Do đó,

$$\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b. Ta có :

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

Mà $\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2} \geq 0$ và $0 \leq \cos\frac{A-B}{2} \leq 1$

Suy ra

$$\cos A + \cos B \leq 2\cos\frac{A+B}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$\cos C + \cos\frac{\pi}{3} \leq 2\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

Do đó,

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos\frac{\pi}{3} \leq 2\left[\cos\frac{A+B}{2} + \cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]$$

$$\leq 4\cos\left(\frac{A+B}{4} + \frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$$

Suy ra

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos\frac{\pi}{3} \leq 4\cos\frac{\pi}{3}$$

Hay

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

c. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin A \sin B \sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

d. Ta thấy :

- Nếu tam giác ABC có một góc tù thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu tam giác ABC nhọn thì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\cos A \cos B \cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

e. Áp dụng bất đẳng thức cơ bản đã chứng minh ở câu a, ta được :

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{\pi}{6} \leq 2\left[\sin\frac{A+B}{4} + \sin\left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\right] \leq 4\sin\left(\frac{A+B}{8} + \frac{C}{8} + \frac{\pi}{24}\right)$$

Suy ra

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{\pi}{6} \leq 4\sin\frac{\pi}{6}$$

Vậy ta được :

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$$

f. Áp dụng bất đẳng thức cơ bản đã chứng minh ở câu b, ta được :

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}\le 2\left[\cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$
$$\le 4\sin\left(\frac{A+B}{8}+\frac{C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}$$

Suy ra

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

g. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$$

h. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

<u>Bài 2:</u> Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$

b. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$

c. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

d. $2<\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

e. $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\frac{9}{4}$

f. $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{3}{4}$

g. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{4}$

Giải:

a. Ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C = 2 + \cos C\,[\cos(A-B) - \cos C]$$

- Nếu góc C tù thì $\cos C\,[\cos(A-B) - \cos C] < 0$. Suy ra

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2 < \frac{9}{4}$$

- Nếu góc C không tù thì

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2\cos C\,(1-\cos C) \leq 2 + \left[\frac{\cos C + (1-\cos C)}{2}\right]^2 = \frac{9}{4}$$

b. Ta có :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C\,[\cos(A-B) - \cos C]$$

- Nếu góc C tù thì $-\cos C\,[\cos(A-B) - \cos C] > 0$. Suy ra

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1 > \frac{3}{4}$$

- Nếu góc C không tù thì

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 1 - \cos C\,(1-\cos C) \geq 1 - \left(\frac{\cos C + 1 - \cos C}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

c. Ta có :

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

d. Ta có :

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{9}{4}$$

Mặt khác :

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>2$$

Do $\sin\frac{A}{2}\ ;\ \sin\frac{B}{2}\ ;\ \sin\frac{C}{2}>0$

e. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\le\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$$

f. Ta có :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$

$$=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

$$\ge\frac{3}{4}+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

Suy ra

$$\frac{3}{4}+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)\le(\cos A+\cos B+\cos C)^2\le\frac{9}{4}$$

Do đó,

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{3}{4}$$

g. Ta có :

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\ge\frac{3}{4}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

Suy ra

$$\frac{3}{4}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{9}{4}$$

Do đó,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{4}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}$

b. $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq 6$ (ABC nhọn)

c. $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 6$

d. $\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{3}$

e. $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq 4$

f. $\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geq 12$

g. $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 12$

h. $\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\geq 4$

Giải:

a. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}\geq\frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}\geq\frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\geq 2\sqrt{3}$$

b. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}}\geq\frac{9}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{9}{\frac{3}{2}}=6$$

c. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\geq\frac{9}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\geq 6$$

d. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}\geq\frac{9}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{3}$$

e. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}}\geq\frac{9}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq\frac{9}{\frac{9}{4}}=4$$

f. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}}\geq\frac{3}{\frac{1}{4}}=12$$

g. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}\geq\frac{9.4}{3}=12$$

h. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}}\geq\frac{3.4}{3}=4$$

Chú ý : Từ câu **e, f, g, h** ta rút ra được kết quả sau :

e. $\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C\geq 1$ f. $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\geq 9$

g. $\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geq 9$ h. $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1$

Bài 4: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ (ABC nhọn)

b. $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ (ABC nhọn)

c. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ d. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

Giải:

a. Ta có 2 cách chứng minh :

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^3\geq 27\tan A\tan B\tan C=27(\tan A+\tan B+\tan C)$$

Suy ra

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

Cách 2: Ta có

$$\tan A\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

Mặt khác :

$$0<2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)\leq 1+\cos(A+B)=2\cos^2\frac{A+B}{2}$$

Nên

$$\tan A + \tan B \geq \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos^2\frac{A+B}{2}} = 2\tan\frac{A+B}{2}$$

Tương tự, ta được :

$$\tan C + \tan\frac{\pi}{3} \geq 2\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

Do đó,

$$\tan A + \tan B + \tan C + \tan\frac{\pi}{3} \geq 2\left[\tan\frac{A+B}{2} + \tan\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right] \geq 4\tan\frac{\pi}{3}$$

Suy ra

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

b. Ta có :

$$\begin{aligned}(\cot A + \cot B + \cot C)^2 &\\ &= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)\\ &\geq 1 + 2 = 3\end{aligned}$$

Do đó,

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

c. Ta có :

$$\begin{aligned}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 &\\ &= \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)\\ &\geq 3\end{aligned}$$

Do đó,

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

d. Ta sử dụng đẳng thức

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = 27\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

Suy ra

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

Bài 5: Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta luôn có :

a. $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) \leq a + b + c$

b. $2(a\sin A + b\sin B + c\sin C) \geq (a+b)\sin C + (b+c)\sin A + (c+a)\sin B$

c. $8m_a m_b m_c \leq 27R^3$

(ĐH Ngoại Thương 1996)

d. $R \geq 2r$

e. $p^2 \leq 6R^2 + 3r^2$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

Giải:

a. Áp dụng định lý các hình chiếu, ta có :

$$c = a\cos B + b\cos A$$

Mà

$$(a-b)(\cos A - \cos B) \leq 0 \Leftrightarrow a\cos A + b\cos B \leq a\cos B + b\cos A$$

Suy ra $a\cos A + b\cos B \leq c$. Tương tự, ta có :

$$b\cos B + c\cos C \leq a$$

$$c\cos C + a\cos A \leq b$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta suy ra được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$$(a-b)(\sin A - \sin B) \geq 0 \Leftrightarrow a\sin A + b\sin B \geq a\sin B + b\sin A$$

Tương tự, ta có :

$$b\sin B + c\sin C \geq b\sin C + c\sin B$$

$$c\sin C + a\sin A \geq c\sin A + a\sin C$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta suy ra được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$m_a + m_b + m_c \leq \left(\frac{m_a + m_b + m_c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}(m_a + m_b + m_c)^3$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovsky và định lý hàm số sin :

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

Mà ta có bất đẳng thức cơ bản :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Do đó,

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{81}{4}R^2$$

Suy ra

$$m_a m_b m_c \leq \frac{1}{27}.\left(\frac{9R}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}R^3$$

Từ đó ta có được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d. Ta có :

$$S = pr = \frac{abc}{4R} \Longrightarrow r = \frac{abc}{4pR} = \frac{8R^3 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{4R.\frac{a+b+c}{2}}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{4R^2 \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{2R(\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})} = 2R.\frac{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}{4\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}} = 4R\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$\leq 4R.\frac{1}{8} = \frac{R}{2}$$

Từ đó, ta có được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

e. Ta có :

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p[p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc]$$
$$= p^2[p^2 - (a+b+c)p + (ab+bc+ca) - 4Rr]$$

$$\Rightarrow r^2 = p^2 - (a+b+c)p + (ab+ba+ca) - 4Rr$$

$$\Rightarrow p^2 = (ab+bc+ca) - r(4R+r)$$

Do đó,

$$4p^2 = (a+b+c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) + 4r(4R+r)\ (*)$$

Mặt khác :

$$a^2+b^2+c^2 = 4R^2(\sin^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{C}) \leq 4R^2.\frac{9}{4} = 9R^2\ (**)$$

Từ (*) và (**) thì ta được :

$$4p^2 \leq 18R^2 + 16Rr + 4r^2 \Rightarrow 2p^2 \leq 12R^2 + 6r^2 - (R-2r)(3R-2r) \leq 12R^2 + 6r^2$$

(Vì $R \geq 2r \Rightarrow (R-2r)(3R-2r) \geq 0$)

Vậy ta có :

$$p^2 \leq 6R^2 + 3r^2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 6: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có :

a. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

b. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

c. $a^2 \leq b^2 + c^2 + R^2$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

d. $r(r_a + r_b + r_c) \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C}{6}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2010)

Giải:

a. Ta có :

$$\tan\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) = \cos B + \cos C$$
$$\tan\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) = \cos C + \cos A$$
$$\tan\frac{C}{2}(\sin A + \sin B) = \cos A + \cos B$$

Và

$$\frac{r}{R} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\sin B + \tan\frac{B}{2}\sin A \geq 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\sin B\tan\frac{B}{2}\sin A}$$

Hay

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\le\frac{1}{4}\left(\tan\frac{A}{2}\sin B+\tan\frac{B}{2}\sin A\right)$$

Tương tự, ta được :

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{4}\left(\tan\frac{B}{2}\sin C+\tan\frac{C}{2}\sin B\right)$$
$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{1}{4}\left(\tan\frac{C}{2}\sin A+\tan\frac{A}{2}\sin C\right)$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}$$
$$=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{4}+\frac{1}{4}+\frac{r}{4R}$$

Ta lại có bất đẳng thức cơ bản :

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

Do đó, ta có được điều phải chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.
b. Ta có :

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2=\frac{S^2}{(p-a)^2}+\frac{S^2}{(p-b)^2}+\frac{S^2}{(p-c)^2}$$
$$=p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-a)(p-c)}{p-b}+\frac{(p-b)(p-a)}{p-c}\right]$$
$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Ta đặt :

$$\begin{cases}x=p-a\\y=p-b\\z=p-c\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+y=c\\x+z=b\\y+z=a\\x+y+z=p\end{cases}$$

Ta đưa điều cần chứng minh tương đương với

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)\ge\frac{3}{4}[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]$$

Thật vậy, ta có :

$$x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2(x^2+y^2+z^2)$$

Suy ra

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)\ge 2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{1}{2}(xy+yz+zx)$$

Do đó,

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

$$=\frac{3}{4}[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c. Bất đẳng thức tương đương với

$$4\sin^2 \mathrm{A} \leq 4\sin^2 \mathrm{B} + 4\sin^2 \mathrm{C} + 1$$

$\Leftrightarrow 4(1-\cos^2 \mathrm{A}) \leq 2(1-\cos 2\mathrm{B}) + 2(1-\cos 2\mathrm{C}) + 1$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 \mathrm{A} - 2(\cos 2\mathrm{B} + \cos 2\mathrm{C}) + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 \mathrm{A} + 4\cos \mathrm{A}\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C}) + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow [2\cos \mathrm{A} + \cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})]^2 + \sin^2(\mathrm{B}-\mathrm{C}) \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = 2\cos \mathrm{A} + \cos(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = 0$ hay tam giác ABC cân tại A và có góc A là 120^o.

d. Ta có :

$$\begin{cases} c = r_c\left(\tan\frac{\mathrm{A}}{2}+\tan\frac{\mathrm{B}}{2}\right) \\ c = \dfrac{r}{\tan\frac{\mathrm{A}}{2}} + \dfrac{r}{\tan\frac{\mathrm{B}}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2 = rr_c\left(2+\frac{\tan\frac{\mathrm{B}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}+\frac{\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{B}}{2}}\right) \geq 4rr_c$$

Tương tự thế thì ta có

$$a^2 \geq 4rr_a \text{ và } \mathrm{b}^2 \geq 4rr_b$$

$$\Rightarrow r(r_a+r_b+r_c) \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

Mặt khác:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}=\frac{1}{4}[(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)]$$
$$=\frac{1}{2}(ab\cos \mathrm{C}+bc\cos \mathrm{A}+ca\cos \mathrm{B})$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{2}(ab\cos \mathrm{C}+bc\cos \mathrm{A}+ca\cos \mathrm{B})\leq\frac{1}{6}[2(a^3+b^3+c^3)+\cos^3 \mathrm{A}+\cos^3 \mathrm{B}+\cos^3 \mathrm{C}]$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}+\frac{\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C}{6}$$

$$\Rightarrow r(r_a+r_b+r_c)\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}+\frac{\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C}{6}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\cos^3 \mathrm{A}+\cos^3 \mathrm{B}+\cos^3 \mathrm{C}\leq\frac{9}{8}+\frac{1}{4}(\cos 3\mathrm{A}+\cos 3\mathrm{B}+\cos 3\mathrm{C})$

(ĐH An Ninh Hà Nội 1997)

b. $\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\leq\cos^2\frac{\mathrm{C}}{2}$

(ĐHQG Hà Nội 1997)

c. $\dfrac{\sqrt[3]{\sin \mathrm{A}}+\sqrt[3]{\sin \mathrm{B}}+\sqrt[3]{\sin \mathrm{C}}}{\sqrt[3]{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}}\leq 1$

(ĐH Bách Khoa Hà Nội 2000)

d. $\dfrac{\mathrm{A.B}}{\cos^2\frac{\mathrm{A}}{4}\cos^2\frac{\mathrm{B}}{4}}+\dfrac{\mathrm{B.C}}{\cos^2\frac{\mathrm{B}}{4}\cos^2\frac{\mathrm{C}}{4}}+\dfrac{\mathrm{C.A}}{\cos^2\frac{\mathrm{C}}{4}\cos^2\frac{\mathrm{A}}{4}}<4$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

e. $\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sqrt{\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Giải:

a. Điều cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{\cos 3A + 3\cos A}{4} + \frac{\cos 3B + 3\cos B}{4} + \frac{\cos 3C + 3\cos C}{4} \le \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

Khi đó ta đưa bài toán về dạng bất đẳng thức cơ bản :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$$VT = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \le \frac{1}{2}[1 - \cos(A+B)] = \sin^2\frac{A+B}{2} = \cos^2\frac{C}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B.

Chú ý: Từ bài toán này, ta rút ra được kết quả sau bằng cách chứng minh tương tự :

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c. Ta chứng minh bất đẳng thức sau : Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a + b \ge 0$,

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với :

$4(a^3 + b^3) \ge a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - 2ab) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2}\right)^3 \le \frac{\sin A + \sin B}{2} = \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le \cos\frac{C}{2}$$

Suy ra

$$\frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

Tương tự, ta được :

$$\frac{\sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sin C} + \sqrt[3]{\sin A}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có được điều phải chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d. Ta chứng minh

$$\frac{A}{\cos^2\frac{A}{4}} < 2\tan\frac{A}{2}$$

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = \tan x + \sin x - 2x, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \ge \frac{1}{\sqrt{\cos x}} > 0$$

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Với $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \tan x + \sin x - 2x > 0$

Suy ra

$$\tan\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - A > 0$$

Hay

$$\frac{A}{\cos^2\frac{A}{4}} < 2\tan\frac{A}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{B}{\cos^2\frac{A}{4}} < 2\tan\frac{B}{2}$$

$$\frac{C}{\cos^2\frac{A}{4}} < 2\tan\frac{C}{2}$$

Như vậy, ta được :

$$VT < 4\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) = 4$$

e. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{27}$$

Ta có :

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$
$$=\frac{1}{8}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)2.\sin\frac{C}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)2.\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{1-\sin\frac{C}{2}+1-\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

Do đó,

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{27}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại C có góc C thỏa $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$.

Chú ý: Ở bài toán này, ta có kết quả tổng quát sau :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sqrt[n]{\sin\frac{C}{2}}\le\frac{n}{2(n+1)\sqrt[n]{n+1}}$$

Bài 8: Trong tam giác ABC, chứng minh rằng :

a. $\dfrac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B}+\dfrac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C}+\dfrac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}\ge 3\sqrt{2}$

b. $\dfrac{1+\cos\frac{A}{2}}{A}+\dfrac{1+\cos\frac{B}{2}}{B}+\dfrac{1+\cos\frac{C}{2}}{C}>3\sqrt{3}$

c. $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}-\left(\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\right)\ge 3\sqrt{3}$

(ĐH Bách Khoa Hà Nội 1999)

d. $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\ge\cos A\cos B\cos C$

(ĐHQG Hà Nội 2000)

Giải:

a. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$1+2\cos^2 A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\cos^2 A\ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cos A\right)^2$$

$$\Longrightarrow 1+2\cos^2 A\ge \frac{2}{3}(1+\cos A)^2=\frac{8}{3}\cos^4\frac{A}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$1+2\cos^2 B\ge \frac{8}{3}\cos^4\frac{B}{2}$$

$$1+2\cos^2 C\ge \frac{8}{3}\cos^4\frac{C}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\mathrm{VT}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B}.\frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C}.\frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

Mặt khác :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$$

Do đó,

$$\mathrm{VT}\ge 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b. Ta chứng minh

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2},\forall x>0$$

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$$

$$f'(x)=-\sin x+x$$

Đặt $g(x)=f'(x)$,

$$g'(x)=-\cos x+1>0$$

Do đó, $g(x)$ đồng biến. Suy ra

$$g(x)>g(0)=0$$

Ta có $f(x)$ đồng biến. Suy ra

$$f(x) > f(0) = 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng vào bài toán, ta được :

$$\cos\frac{A}{2} > 1 - \frac{A^2}{8} \Rightarrow \frac{1+\cos\frac{A}{2}}{2} > \frac{2}{A} - \frac{A}{8}$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{1+\cos\frac{B}{2}}{2} > \frac{2}{A} - \frac{B}{8}$$

$$\frac{1+\cos\frac{C}{2}}{2} > \frac{2}{A} - \frac{C}{8}$$

Do đó,

$$VT > 2\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) - \frac{A+B+C}{8}$$

Ta có bất đẳng thức cơ bản :

$$(A+B+C)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{\pi}$$

Vậy

$$VT > \frac{18}{\pi} - \frac{\pi}{8} > 3\sqrt{3}$$

c. Ta có đẳng thức cơ bản sau :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} - \cot\frac{A}{2} = \tan\frac{A}{4}$$

Do đó,

$$\frac{1}{\sin\frac{B}{2}} - \cot\frac{B}{2} = \tan\frac{B}{4}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} - \cot\frac{C}{2} = \tan\frac{C}{4}$$

Suy ra

$$VT = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d. Ta có 2 trường hợp :

- Nếu tam giác ABC vuông hoặc tù thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu tam giác ABC nhọn :

Điều cần chứng minh tương đương với :

$$\left(1-\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}\right)\left(1-\frac{1-\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}\right)\left(1-\frac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}\right)$$
$$\geq \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}.\frac{1-\tan^2\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}.\frac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$$

Hay

$$8\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} \geq \left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{C}{2}\right)$$

Do $0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}>0$

Áp dụng công thức

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

Ta đưa bài toán trở thành :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \geq \frac{1}{\tan A}.\frac{1}{\tan B}.\frac{1}{\tan C}$$
$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C \geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Mặt khác :

$$\tan A+\tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin C}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} \geq \frac{2\sin C}{1-\cos C} = 2\cot\frac{C}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$\tan B+\tan C \geq 2\cot\frac{C}{2}$$
$$\tan A+\tan C \geq 2\cot\frac{B}{2}$$

Suy ra

$$2(\tan A + \tan B + \tan C) \geq 2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 9: Cho tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng :

a. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ĐH Kinh Tế Quốc Dân 1997)

b. $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3 + \dfrac{3n}{2}, n \in \mathbb{N}$

c. $3\sin^4\dfrac{A}{2} + 9\tan^8\dfrac{A}{2} + 8\sin^6\dfrac{B}{2} + 4\tan^6\dfrac{B}{2} + 24\sin^8\dfrac{C}{2} + 2\tan^4\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{767}{864}$

d. $\sqrt[3]{4^{\sin A + \sin B + \sin C}} + \sqrt[3]{2^{\tan A + \tan B + \tan C}} > 2^{1+\frac{\pi}{2}}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải:

a. Ta có :

$$VT = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C} = \frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C} \geq \frac{2\cos\frac{C}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2} + \cos C}$$

Thật vậy, điều trên tương đương với

$$\left(2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C\right)\left(2\sin\frac{C}{2} + \cos C\right)$$
$$\geq \left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\right)\left(2\cos\frac{C}{2} + \sin C\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos C\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin C\sin\frac{C}{2} \geq 2\cos\frac{C}{2}\cos C + 2\sin C\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A-B}{2}-1\right)\left(\cos C\cos\frac{C}{2}-\sin C\sin\frac{C}{2}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A-B}{2}-1\right)\cos\frac{3C}{2}\geq 0$

Giả sử $C=\max\{A,B,C\}$.

$\Rightarrow C\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\frac{3C}{2}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow\cos\frac{3C}{2}\leq 0$

Do đó, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Ta xét hàm số :

$$f(x)=\frac{2\cos\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin\frac{x}{2}+\cos x}, x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x)=\frac{\sin\frac{3x}{2}-1}{\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)^2}\leq 0, \forall x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến. Do đó,

$$f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Từ đó, ta có :

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại C.

b. Theo bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3\sqrt[3]{(\tan A\tan B\tan C)^n}\geq 3\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}\geq 3\left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có :

$$3\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\geq 3\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

Do đó,

$$\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3+\frac{3n}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $n=0$.

c. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$3\sin^4\frac{A}{2}+3\left(\frac{1}{2}\right)^4\geq\frac{3}{2}\sin^2\frac{A}{2}$

$8\sin^6\frac{B}{2}+8\left(\frac{1}{2}\right)^6+8\left(\frac{1}{2}\right)^6\geq\frac{3}{2}\sin^2\frac{B}{2}$

$24\sin^8\frac{C}{2}+24\left(\frac{1}{2}\right)^8+24\left(\frac{1}{2}\right)^8+24\left(\frac{1}{2}\right)^8\geq\frac{3}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

$9\tan^8\frac{A}{2}+9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8+9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8+9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8\geq\frac{4}{3}\tan^2\frac{A}{2}$

$4\tan^6\frac{B}{2}+4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6+4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6\geq\frac{4}{3}\tan^2\frac{B}{2}$

$2\tan^4\frac{C}{2}+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4\geq\frac{4}{3}\tan^2\frac{C}{2}$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\frac{3}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\geq\frac{9}{8}$$
$$\frac{4}{3}\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right)\geq\frac{4}{3}$$

Cộng 8 bất đẳng thức trên, ta có được điều phải chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$VT=2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)}+2^{\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}\geq 2\sqrt{2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}}$$

Ta cần chứng minh :

$$2\sqrt{2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}}>2^{1+\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)>\pi$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\sin A+\frac{1}{3}\tan A-A\right)+\left(\frac{2}{3}\sin B+\frac{1}{3}\tan B-B\right)+\left(\frac{2}{3}\sin C+\frac{1}{3}\tan C-C\right)>0$$

Xét hàm số

$$f(x)=\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x-x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{3}.\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-1\geq\frac{1}{3}.3-1=0$$

Ta thấy rằng dấu " = " trong bất đẳng thức

$$\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\geq 3$$

không thể xảy ra.
Do đó, $f(x)$ đồng biến. Nên $f(x)>f(0)$
Suy ra

$$\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x-x>0$$

Lần lượt thay $x = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 10: Cho tam giác ABC và các số thực $x, y, z > 0$

Hãy chứng minh rằng

$$\frac{\cos \mathrm{A}}{x} + \frac{\cos \mathrm{B}}{y} + \frac{\cos \mathrm{C}}{z} \le \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy}$$

Giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$2yz \cos \mathrm{A} + 2xz \cos \mathrm{B} + 2xy \cos \mathrm{C} \le x^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow 2yz \cos \mathrm{A} + 2xz \cos \mathrm{B} + 2xy \cos \mathrm{C}$

$\le x^2(\cos^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{B}) + y^2(\cos^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{A}) + z^2$

$\Leftrightarrow 2yz \cos \mathrm{A} + 2xz \cos \mathrm{B} - 2xy(\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} - \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B})$

$\le x^2(\cos^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{B}) + y^2(\cos^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{A}) + z^2$

$\Leftrightarrow (x^2 \sin^2 \mathrm{B} - 2xy \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B} + y^2 \sin^2 \mathrm{A})$

$+(x^2 \cos^2 \mathrm{B} + y^2 \cos^2 \mathrm{A} + z^2 + 2xy \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} - 2xz \cos \mathrm{B} - 2yz \cos \mathrm{A}) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x \sin \mathrm{B} - y \sin \mathrm{A})^2 + (x \cos \mathrm{B} + y \cos \mathrm{A} - z)^2 \ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Do đó, ta có được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \sin \mathrm{B} - y \sin \mathrm{A} = 0 \\ x \cos \mathrm{B} + y \cos \mathrm{A} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cos \mathrm{B} + \dfrac{x \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}} = z \\ y = \dfrac{x \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sin \mathrm{C} = z \sin \mathrm{A} \\ x \sin \mathrm{B} = y \sin \mathrm{A} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x : y : z = a : b : c$$

Bài 12: Cho tam giác ABC nhọn, hãy chứng minh rằng

a. $a + b + c \le \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{a}{\mathrm{A}} + \dfrac{b}{\mathrm{B}} + \dfrac{c}{\mathrm{C}}\right)$

b. $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$

c. $\left(\dfrac{a}{\cos \mathrm{A}} + \dfrac{b}{\cos \mathrm{B}} - c\right)\left(\dfrac{b}{\cos \mathrm{B}} + \dfrac{c}{\cos \mathrm{C}} - a\right)\left(\dfrac{c}{\cos \mathrm{C}} + \dfrac{a}{\cos \mathrm{A}} - b\right) \ge 27abc$

d. $\dfrac{\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}}{\cos\left(\frac{\mathrm{B} - \mathrm{C}}{2}\right)} + \dfrac{\cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A}}{\cos\left(\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{2}\right)} + \dfrac{\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B}}{\cos\left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right)} \le \dfrac{3}{4}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải:

a. Giả sử $a \leq b \leq c \Longrightarrow \mathrm{A} \leq \mathrm{B} \leq \mathrm{C} \leq 90^{\circ}$.

Ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x - \tan x}{x^2 \cos x}$$

Lại xét hàm số

$$g(x) = \tan x - x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(x) = \tan^2 x > 0$$

Do đó, $g(x)$ đồng biến. Suy ra

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow \tan x > x \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Ta có $f(x)$ nghịch biến. Suy ra

$$\frac{a}{\mathrm{A}} \geq \frac{b}{\mathrm{B}} \geq \frac{c}{\mathrm{C}}$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy

$$\begin{cases} \mathrm{A} \leq \mathrm{B} \leq \mathrm{C} \\ \dfrac{a}{\mathrm{A}} \geq \dfrac{b}{\mathrm{B}} \geq \dfrac{c}{\mathrm{C}} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3} \cdot \frac{\frac{a}{\mathrm{A}} + \frac{b}{\mathrm{B}} + \frac{c}{\mathrm{C}}}{3} \geq \frac{\frac{a}{\mathrm{A}}.\mathrm{A} + \frac{b}{\mathrm{B}}.\mathrm{B} + \frac{c}{\mathrm{C}}.\mathrm{C}}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = R^2(2\sin^2 \mathrm{B} + 2\sin^2 \mathrm{C} - \sin^2 \mathrm{A})$$
$$= R^2[1 - (\cos 2\mathrm{B} + \cos 2\mathrm{C}) + \cos^2 \mathrm{A}]$$
$$= R^2[1 + 2\cos \mathrm{A} \cos(\mathrm{B} - \mathrm{C}) + \cos^2 \mathrm{A}]$$

Suy ra

$$m_a^2 \leq R^2(1 + 2\cos \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{A}) = R^2(1 + \cos \mathrm{A})^2 = 4R^2 \cos^4 \frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\Longrightarrow m_a^2 \leq 2R \cos^2 \frac{\mathrm{A}}{2}$$

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{a}{m_a} \geq \frac{a}{2R\cos^2 \frac{\mathrm{A}}{2}} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\cos^2 \frac{\mathrm{A}}{2}} = 2\tan \frac{\mathrm{A}}{2}$$

Tương tự, ta được :

$$\begin{cases} \dfrac{b}{m_b} \geq 2\tan\dfrac{B}{2} \\ \dfrac{c}{m_c} \geq 2\tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có :

$$VT \geq 2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

c. Theo định lý hàm số sin, điều cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{2R\sin A}{\cos A} + \frac{2R\sin B}{\cos B} - 2R\sin C\right)\left(\frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} - 2R\sin A\right)\left(\frac{2R\sin C}{\cos C} + \frac{2R\sin A}{\cos A} - 2R\sin B\right) \geq 27.2R\sin A\,.\,2R\sin B\,.\,2R\sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin C}{\cos A\cos B} - \sin C\right)\left(\frac{\sin A}{\cos B\cos C} - \sin A\right)\left(\frac{\sin B}{\cos C\cos A} - \sin B\right) \geq 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A\cos B}{\cos A\cos B}.\frac{1 - \cos B\cos C}{\cos B\cos C}.\frac{1 - \cos C\cos A}{\cos C\cos A} \geq 27$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1 - \cos A\cos B}{\cos A\cos B} = \frac{2\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1 - \tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1 - \tan^2\frac{B}{2}\right)}$$

Thật vậy,

$$\frac{2\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1 - \tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1 - \tan^2\frac{B}{2}\right)} = \frac{2\left(\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2}\right)\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos A\cos B}$$

$$= \frac{2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2}\right)}{\cos A\cos B}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 + \cos B) + (1 - \cos B)(1 + \cos A)}{2\cos A\cos B} = \frac{1 - \cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=\frac{2\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{B}{2}\right)}\geq\frac{2\tan^2\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.\frac{2\tan^2\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}=\tan A\tan B$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\geq\tan B\tan C$$
$$\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq\tan C\tan A$$

Như vậy

$$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}.\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}.\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C$$

Mà theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}\Rightarrow\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C\geq 27$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$2\frac{\cos B\cos C}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}=4\frac{\cos B\cos C}{\cos B+\cos C}.\sin\frac{A}{2}\leq 2\sqrt{\cos B\cos C}\sin\frac{A}{2}\leq\cos B\cos C+\sin^2\frac{A}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$2\frac{\cos C\cos A}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}\leq\cos C\cos A+\sin^2\frac{B}{2}$$
$$2\frac{\cos A\cos B}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}\leq\cos A\cos B+\sin^2\frac{C}{2}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta được :

$$2VT\leq\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$$
$$\leq\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]+\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leq\frac{3}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

Do đó,

$$2VT\leq\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]=\frac{3}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 13: Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác nhọn ABC thỏa điều kiện $2\mathrm{A}+3\mathrm{B}=\pi$ thì các cạnh của nó thỏa mãn

$$a+b<\frac{5}{4}c$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải: Ta có :

$$2\mathrm{A}+3\mathrm{B}=\pi \Longrightarrow \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\mathrm{B}}{2} \Longrightarrow \mathrm{C}=\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{B}}{2}$$

Suy ra

$$\sin \mathrm{A}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\mathrm{B}}{2}\right)=\cos\frac{3\mathrm{B}}{2}=\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\left(4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}-3\right)$$

$$\sin \mathrm{C}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)=\cos\frac{\mathrm{B}}{2}$$

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}}=\frac{b}{\sin \mathrm{B}}=\frac{c}{\sin \mathrm{C}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\left(4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}-3\right)}=\frac{b}{2\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\mathrm{B}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}-3}=\frac{b}{2\sin\frac{\mathrm{B}}{2}}=c$$

Theo tính chất tỷ lệ thức, ta có :

$$c=\frac{a+b}{4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{2}-3+2\sin\frac{\mathrm{B}}{2}}$$

Suy ra

$$a+b=c\left(-4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}+2\sin\frac{\mathrm{B}}{2}+1\right)$$

Mặt khác

$$2\mathrm{A}+3\mathrm{B}=\pi \Longrightarrow \frac{\mathrm{B}}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\mathrm{A}}{3} \Longrightarrow 0<\frac{\mathrm{B}}{2}<\frac{\pi}{6} \Longrightarrow 0<\sin\frac{\mathrm{B}}{2}<\frac{1}{2}$$

Đặt $t=\sin\frac{\mathrm{B}}{2}$, ta xét hàm số

$$f(t)=-4t^2+2t+1, t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(t)=-8t+2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta rút ra kết quả

$$a + b = c\left(-4\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 1\right) \le \frac{5}{4}c$$

Tuy nhiên, dấu " = " không xảy ra vì $\hat{C} > 90^o$. Do đó, ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 14:</u> Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng tam giác ABC tù khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2009)

<u>Giải:</u>

Chiều thuận: Giả sử tam giác ABC có góc A tù và $A > B \ge C$. Khi đó

$$0 < C < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \tan C < 1 \\ 0 < \sin\frac{C}{2} < \sin C \end{cases} \Rightarrow 0 < \sin\frac{C}{2} < \sin C < \cos C \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} > \frac{1}{\cos C}$$

Vì $\cos A < 0, \cos B > 0$ và $\cos\frac{A-B}{2} > 0$ $\left(0 < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos B} < 0 < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}$$

Do đó, chiều thuận đúng.

Chiều nghịch: Giả sử tam giác ABC nhọn. Ta suy ra $\cos A, \cos B, \cos C > 0$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\geq\frac{2}{\sqrt{\cos A\cos B}}\geq\frac{4}{\cos A+\cos B}=\frac{2}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\geq\frac{2}{\sin\frac{C}{2}}$$

Tương tự, ta có ;

$$\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\geq\frac{2}{\sin\frac{B}{2}}$$

Do đó,

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Điều này vô lí. Vậy chiều nghịch đúng.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 15: Cho tam giác ABC chứng minh rằng

$$\frac{c}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Longrightarrow h_a\leq\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2010)

Giải:

Không mất tính tổng quát nên ta sẽ giả sử $c=1; b=\sqrt{3}$

Ta có: $h_a=c\sin B=\sin B$.

Bài toán sẽ đưa về chứng minh:

$$\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Áp dụng hàm số sin thì

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B}$$

Áp dụng hàm số cos thì

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4-2\sqrt{3}\cos A$$

Ta có :

$$\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \le 2 \Rightarrow \sin A \le 2 - \sqrt{3}\cos A$$

$\Rightarrow 2\sin A \le a^2 \Rightarrow 2\sin A \le a\dfrac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B} \Rightarrow \sin B \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 16: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

Giải: Ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2} - c\right)}$$

$$\Rightarrow 16S^2 = (1-2a)(1-2b)(1-2c) = 1 - 2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc$$

$$= -1 + 4(ab+bc+ca) - 8abc$$

Mặt khác

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 4(ab+bc+ca) = 2 - 2(a^2+b^2+c^2)$$

Suy ra

$$16S^2 = -1 - 2(a^2+b^2+c^2) - 8abc > 0$$

Vậy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

Bài 17: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng

$$3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 8R \sin A \sin B \sin C \geq \frac{13}{4R^2}$$

(ĐH Sư Phạm Vinh 2001)

Giải: Theo định lý hàm số sin, ta có điều cần chứng minh tương đương với

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$$

Giả sử $a \leq b \leq c$. Ta có : $a + b + c = 3$ nên

$$\begin{cases} a + b > c \\ 3c \geq a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - c > c \\ c \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq c < \frac{3}{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc &= 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 + 4abc - 6ab = 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2ab(3-2c) \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{cases} ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2 \\ c < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2ab \geq -2\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2 \\ 3 - 2c > 0 \end{cases}$$

Nên

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 (3-2c)$$

Hay

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$$

Xét hàm số

$$f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}, c \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3c$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

c	1		$\frac{3}{2}$
$f'(c)$	0	$+$	
$f(c)$	13	$\nearrow$	$\frac{27}{2}$

Từ bảng biến thiên, ta có được

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 18: Cho tam giác ABC trong đó $a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng

$$(a + b + c)^2 \leq 9bc$$

Hơn nữa, nếu $a < b < c$. Chứng minh rằng

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

Giải:

Do $a \leq b \leq c$ nên $a + b + c \leq 2b + c$. Suy ra

$$(a + b + c)^2 \leq (2b + c)^2$$

Mặt khác do $b \leq c$ nên

$$\begin{cases} 2b - c \leq 2b - b = b \\ 2b - c \leq 2c - c = c \end{cases} \Longrightarrow (2b - c)^2 \leq bc$$

Vậy

$$(a + b + c)^2 \leq 9bc$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ta lại có :

$$\begin{aligned} & a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ & = a^3(b^2 - c^2) + b^2c^2(b - c) - a^2(b^3 - c^3) \\ & = (b - c)[a^3(b + c) + b^2c^2 - a^2(b^2 + c^2 + bc)] \\ & = (b - c)(a^3b + a^3c + b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2bc) \\ & = (b - c)[a^2b(a - b) + a^2c(a - b) + c^2(b^2 - a^2)] \\ & = (b - c)(a - b)[a^2b + a^2c - c^2(a + b)] \\ & = (b - c)(a - b)[ac(a - c) + b(a^2 - c^2)] \\ & = (b - c)(a - b)(a - c)[ac + b(a + c)] \end{aligned}$$

Vì $a < b < c$ nên $(b - c)(a - b)(a - c) < 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 19: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng

$$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

Giải:
Giả sử $a \leq b \leq c$. Ta suy ra được

$$2c < a + b + c = 2 \Longrightarrow c < 1$$

Do đó :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 2abc &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) + 2abc \\ &= 2 + 2(a + b + c - ab - bc - ca + abc) \\ &= 2 + 2(1 - c)(a - 1)(1 - b) < 2 \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{(1 - a) + (1 - b) + (1 - c)}{3} \geq \sqrt[3]{(1 - a)(1 - b)(1 - c)}$$

Suy ra

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{1}{27}$$

Hay

$$1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \leq \frac{1}{27}$$

Mà $a + b + c = 2 \Longrightarrow ab + bc + ca = 2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

Nên

$$1 - 2 + 2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - abc \leq \frac{1}{27}$$

Do đó

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq \frac{52}{27}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 20: Cho tam giác ABC không vuông thỏa $5\sin^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \mathrm{C} = 2$. Chứng minh rằng

$$\sin \mathrm{A} \leq \frac{3}{5}$$

Giải: Ta có :

$5\sin^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \mathrm{C} = 2$

$\Leftrightarrow 5(1 - \cos^2 \mathrm{A}) + \dfrac{1 + \cos 2\mathrm{B}}{2} + \dfrac{1 + \cos 2\mathrm{C}}{2} = 2$

$\Leftrightarrow -5\cos^2 \mathrm{A} + 6 + \dfrac{1}{2}(\cos 2\mathrm{B} + \cos 2\mathrm{C}) = 2$

$\Leftrightarrow -5\cos^2 \mathrm{A} + 4 + \cos(\mathrm{B} + \mathrm{C})\cos(\mathrm{B} - \mathrm{C}) = 0$

$\Leftrightarrow -5\cos^2 A + 4 = \cos A\cos(B - C)$

Ta xét 2 trường hợp :

- Nếu góc A nhọn thì $\cos A > 0$. Do $\cos(B - C) \leq 1$, ta suy ra

$$-5\cos^2 A + 4 = \cos A\cos(B - C) \leq \cos A$$

Suy ra $5\cos^2 A + \cos A - 4 \geq 0$. Do đó

$$\cos A \geq \frac{4}{5}$$

Vì góc A nhọn nên ta cũng có $\sin A > 0$, suy ra

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \leq \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

- Tương tự, nếu góc A tù thì $-5\cos^2 A + 4 = \cos A\cos(B - C) \geq \cos A$

$\Longrightarrow 5\cos^2 A + \cos A - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \cos A \leq \frac{4}{5}$

Do $\cos A < 0$ và $\sin A > 0$ nên

$$\cos^2 A \geq \frac{16}{25} \Longrightarrow \sin^2 A \leq \frac{9}{5} \Longrightarrow \sin A \leq \frac{3}{5}$$

Vậy ta luôn có $\sin A \leq \frac{3}{5}$.

<u>Bài 21:</u> Cho tam giác ABC có các cạnh và nửa chu vi thỏa mãn $4p(p - a) \leq bc$. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{8}$$

<u>Giải:</u> Ta có :

$$\begin{aligned}
4p(p - a) \leq bc &\Leftrightarrow 2(a + b + c)\left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) \leq bc \\
&\Leftrightarrow (b + c + a)(b + c - a) \leq bc \\
&\Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 \leq bc \\
&\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 + 2bc \leq bc \\
&\Leftrightarrow 2bc\cos A \leq -bc \\
&\Leftrightarrow \cos A \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 120^o \leq \widehat{A} < 180^o
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\le\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

Vì

$$\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}-3}{8}$$

Do đó,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{2\sqrt{3}-3}{8}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\widehat{A}=120^o\\ \widehat{B}=\widehat{C}=30^o\end{cases}$

Bài 22: Cho tam giác ABC vuông tại C. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos^6 A}{A}+\frac{\cos^6 B}{B}\ge\frac{1}{\pi}$$

Giải:

- Nếu $45^o\le A<90^o$ thì $\sin A\ge\cos A\Longrightarrow\sin^6 A\ge\cos^6 A$
- Nếu $0<A<45^o$ thì $\sin^6 A<\cos^6 A$

Vậy ta luôn có

$\left(A-\frac{\pi}{4}\right)(\sin^6 A-\cos^6 A)\ge 0$

$\Leftrightarrow A\sin^6 A-A\cos^6 A-\frac{\pi}{4}\sin^6 A+\frac{\pi}{4}\cos^6 A\ge 0$

$\Leftrightarrow A\sin^6 A+\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos^6 A\ge\frac{\pi}{4}(\sin^6 A+\cos^6 A)$

$\Leftrightarrow A\sin^6 A+B\cos^6 A\ge\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2A\right)\ge\frac{\pi}{16}$

$\Leftrightarrow\frac{\cos^6 A}{A}+\frac{\cos^6 B}{B}\ge\frac{\pi}{16AB}$

Mặt khác

$$AB\le\left(\frac{A+B}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$$

Nên

$$\frac{\cos^6 A}{A} + \frac{\cos^6 B}{B} \geq \frac{1}{\pi}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại C.

Bài 23: Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$(\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Ta xét hàm số

$$f(x) = x\ln x \ , x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$\frac{f(\sin A) + f(\sin B) + f(\sin C)}{3} \geq f\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)$$

Do đó,

$$\frac{\sin A . \ln \sin A + \sin B . \ln \sin B + \sin C . \ln \sin C}{3} \geq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right) . \ln\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)$$

Mà theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác do tam giác ABC nhọn, suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C > 2$$

Và hàm số $g(x) = \ln x \, , x > 0$ đồng biến nên ta có

$$(\sin A + \sin B + \sin C)\ln\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right) > \frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\frac{2}{3}$$

Do đó,

$$(\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Bài 24: Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\geq 3^{1-\sqrt{2}}$$

Giải: Ta xét hàm số

$$f(x)=(\tan x)^{2\sqrt{2}}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=2\sqrt{2}(1+\tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-1}$$

$$f''(x)=4\sqrt{2}\tan x\,(1+\tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-1\right)(1+\tan^2 x)^2(\tan x)^{2\sqrt{2}-2}>0$$

Do đó, theo bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

Hay

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\geq\left(\tan\frac{A+B+C}{6}\right)^{2\sqrt{2}}=3^{1-\sqrt{2}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 25: Cho tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$$

Giải: Ta xét hàm số

$$f(x)=\tan x+\sin x-2x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-2=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x-\cos x-1)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{(1-\cos x)(\cos x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}>0$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến. Suy ra

$$f(x)>f(0)=0$$

$\Longrightarrow \tan x+\sin x>2x$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có :

$$\begin{cases}\sin A+\tan A>2A\\ \sin B+\tan B>2B\\ \sin C+\tan C>2C\end{cases}$$

Do đó,

$$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2(A+B+C)=2\pi$$

Bài 26: Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3}\tan A\tan B\tan C+2\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)\leq 21$$

Giải: Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sqrt{3}(\tan A+\tan B+\tan C)+2\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)\leq 21$$

Ta xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{3}\tan x+\frac{2}{\cos x}\ \ ,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sqrt{3}-2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	7	↘	

Từ bảng biến thiên, ta có :

$$\sqrt{3}\tan x+\frac{2}{\cos x}\leq 7$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{3}\tan A+\dfrac{2}{\cos A}\leq 7\\ \sqrt{3}\tan B+\dfrac{2}{\cos B}\leq 7\\ \sqrt{3}\tan C+\dfrac{2}{\cos C}\leq 7\end{cases}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 27: Cho tam giác ABC không tù và mỗi góc không nhỏ hơn 45^o. Chứng minh rằng

$$\cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A\cot B\cot C \le 4\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Giải: Giả sử $A \le B \le C$. Ta suy ra

$$\frac{\pi}{4} \le A \le \frac{\pi}{3}$$

Ta có :

$$\begin{aligned}&\cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A\cot B\cot C\\ &= \cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A\left[1 - \cot A\left(\cot B + \cot C\right)\right]\\ &= 4\cot A + (1 - 3\cot^2 A)(\cot B + \cot C)\end{aligned}$$

Vì

$$A \le \frac{\pi}{3} \Longrightarrow 1 - 3\cot^2 A \le 1 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \le 0$$

$$\cot B + \cot C \ge 2\cot\frac{B+C}{2} = 2\tan\frac{A}{2} > 0$$

Suy ra

$$4\cot A + (1 - 3\cot^2 A)(\cot B + \cot C) \le 4\cot A + (1 - 3\cot^2 A)2\tan\frac{A}{2}$$

$$= 4.\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}} + \left[1 - 3\left(\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2\right]2.\tan\frac{A}{2} = \frac{4 - 3\left(1-\tan^2\frac{A}{2}\right)^2}{2\tan\frac{A}{2}}$$

Ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{4 - 3(1-x^2)^2}{2x}, x \in \left[\sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$f'(x) = -\frac{(3x^2-1)^2}{2x^2}$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến. Do đó,

$$f(x) \le f\left(\sqrt{2}-1\right) = 4\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân ở A và có góc $\widehat{A} = 45^o$.

Bài 28: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$(2R+a)(2R+b)(2R+c) < 8R^3 e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Giải: Ta có điều phải chứng minh tương đương với

$$\left(1+\frac{a}{2R}\right)\left(1+\frac{b}{2R}\right)\left(1+\frac{c}{2R}\right) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Theo định lý hàm số sin, ta được

$$(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Ta xét hàm số :

$$f(x) = \ln(1+x) - x, x \in (0,1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến. Do đó,

$$f(x) < f(0) = 0$$

Vậy $\ln(1+x) < x$.

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có :

$$\ln(1+\sin A) + \ln(1+\sin B) + \ln(1+\sin C) < \sin A + \sin B + \sin C$$

Hay

$$(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) < e^{(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 29: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$(\sin A)^{\sin B} + (\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A} > 1{,}19$$

Giải: Ta xét hàm số

$$f(x) = x^x, x \in (0;1)$$

$$f'(x) = x^x(1+\ln x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta có :

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli, với , $v \in (0,1)$, ta có :

$$u^v = \frac{u}{[1-(1-u)]^{1-v}} > \frac{u}{1-(1-v)(1-u)} = \frac{u}{u+v-uv} > \frac{u}{u+v}$$

Do đó,

$$(\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A} > \frac{\sin B}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin C}$$

Giả sử : $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$

Suy ra

$$\begin{cases} (\sin A)^{\sin B} \geq (\sin A)^{\sin A} \geq \dfrac{1}{\sqrt[e]{e}} \\ \dfrac{\sin B}{2(\sin B + \sin C)} + \dfrac{\sin C}{\sin A + \sin C} > \dfrac{\sin C}{2(\sin B + \sin C)} \end{cases}$$

Khi đó

$$(\sin A)^{\sin B} + (\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A} > \frac{1}{\sqrt[e]{e}} + \frac{\sin B + \sin C}{2(\sin B + \sin C)} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} + \frac{1}{2} > 1{,}19$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 30: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} + \sqrt[n]{\sin C} \leq 3\sqrt[2n]{\frac{3}{4}}$$

Giải: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin A + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{2}}_{(n-1)\text{ số}} \geq n\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \sin A}$$

Do đó,

$$n\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}\,\mathrm{VT} \leq \sin A + \sin B + \sin C + 3(n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra

$$n\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}\ \text{VT} \le \frac{3n\sqrt{3}}{2}$$

Hay

$$\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}\ \text{VT} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy

$$\text{VT} \le 3\sqrt[2n]{\frac{3}{4}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Chứng minh tương tự bài toán trên, ta có các bất đẳng thức sau :

$$\sqrt[n]{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt[n]{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt[n]{\sin\frac{C}{2}} \le \frac{3}{\sqrt[n]{2}}$$

$$\sqrt[n]{\sin A \sin B} + \sqrt[n]{\sin B \sin C} + \sqrt[n]{\sin C \sin A} \le 3\sqrt[n]{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[n]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \sqrt[n]{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \sqrt[n]{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} \le \frac{3}{\sqrt[n]{4}}$$

Bài 31: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin^n A} + \frac{1}{\sin^n B} + \frac{1}{\sin^n C} \ge 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

Giải: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin^n A} + \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n + \ \dots\ + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}_{(n-1)\text{ số}} \ge n\sqrt[n]{\frac{1}{\sin^n A}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n(n-1)}} = n\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sin A}$$

Do đó,

$$VT + 3(n-1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \geq n\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$$

Suy ra

$$VT + 3(n-1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \geq 2\sqrt{3}n\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = 3n\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

Vậy

$$VT \geq 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Chứng minh tương tự bài toán trên, ta có các bất đẳng thức sau :

$$\frac{1}{\sin^n \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^n \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^n \frac{C}{2}} \geq 3.2^n$$

$$\sin^n \frac{A}{2} + \sin^n \frac{B}{2} + \sin^n \frac{C}{2} \geq \frac{3}{2^n}\ , n \geq 2$$

Bài 32: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\left(n + \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(n + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(n + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq (n+2)^3$$

Giải: Ta có :

$$VT = n^3 + n^2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) + n\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Do đó, theo bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \ge 6 \\ \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)^2} \ge 12 \end{cases}$$

Suy ra

$$VT \ge n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = (n+2)^3$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Chứng minh tương tự bài toán trên, ta có bất đẳng thức sau :

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{\sin\frac{A}{2}}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{\sin\frac{B}{2}}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{\sin\frac{C}{2}}}\right) \ge \left(1 + \sqrt[n]{2}\right)^3$$

<u>Bài 33:</u> Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt[n]{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \le \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{2(n+1)}}$$

<u>Giải:</u> Ta có :

$$\sin^n\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sin^n\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) \le \frac{1}{2}\sin^n\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{2}\sin^n\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2n}\sin^n\frac{A}{2}\left(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ số}} - \underbrace{\sin\frac{A}{2} - \ldots - \sin\frac{A}{2}}_{n \text{ số}}\right) \le \frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n^n}{2(n+1)^{n+1}}$$

Do đó,

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt[n]{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \le \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{2(n+1)}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân ở A và có góc A thỏa mãn :

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Bài 34:</u> Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}}+\sqrt[n]{\sin^2\frac{B}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}}+\sqrt[n]{\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}} \ge 3\sqrt[n]{\frac{17}{4}}$$

<u>Giải:</u> Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} = \sin^2\frac{A}{2}+\underbrace{\frac{1}{16\sin^2\frac{B}{2}}+\ \dots\ +\frac{1}{16\sin^2\frac{B}{2}}}_{16\text{ số}} \ge 17\sqrt[17]{\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{B}{2}}}$$

Suy ra

$$\text{VT} \ge \sqrt[n]{17}\left(\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{B}{2}}}+\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{C}{2}}}+\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{A}{2}}}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta được :

$$\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{B}{2}}}+\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{C}{2}}}+\sqrt[17n]{\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{A}{2}}}$$

$$\ge 3\sqrt[51n]{\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{B}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{C}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{16^{16}\sin^{32}\frac{A}{2}}}$$

$$= 3\sqrt[51n]{\frac{1}{16^{48}\sin^{32}\frac{A}{2}\sin^{32}\frac{B}{2}\sin^{32}\frac{C}{2}}}$$

Do đó,

$$\mathrm{VT} \geq 3\sqrt[n]{17}.\sqrt[51n]{\frac{1}{16^{48}\sin^{30}\frac{A}{2}\sin^{30}\frac{B}{2}\sin^{30}\frac{C}{2}}}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Vậy

$$\sqrt[n]{\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}}+\sqrt[n]{\sin^2\frac{B}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}}+\sqrt[n]{\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}} \geq 3\sqrt[n]{\frac{17}{4}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 35: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin^n\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin^n\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}} \geq \frac{3}{2^n}$$

Giải: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{2^n}+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}}_{\left(\frac{n}{2}-2\right)\text{ số}} \geq \frac{n}{2}\sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{2^n.2^{n\left(\frac{n}{2}-2\right)}}} = \frac{n}{2}\sin^2\frac{A}{2}.\frac{1}{2^{n-2}}$$

Do đó, ta được

$$\mathrm{VT}+\frac{1}{2^n}.2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)+\frac{3}{2^n}\left(\frac{n}{2}-2\right) \geq \frac{n}{2^{n-1}}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \\ \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ta suy ra

$$\mathrm{VT}+\frac{3}{2^n}\left(\frac{n}{2}-2\right) \geq \frac{3n}{2^{n+1}}-\frac{3}{2^n}$$

Hay

$$\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin^n\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin^n\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}}\ge\frac{3}{2^n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Từ bài toán trên, ta có kết quả sau :

Với tam giác ABC không tù

$$\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin^n\frac{B}{2}}{\sin C+\sin A}+\frac{\sin^n\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B}\ge\frac{\sqrt{3}}{2^n}$$

Với tam giác ABC nhọn

$$\frac{\tan^n A}{\tan B+\tan C}+\frac{\tan^n B}{\tan C+\tan A}+\frac{\tan^n C}{\tan A+\tan B}\ge\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

<u>Bài 36:</u> Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng với $n\ge m+1, m\ge 0$ thì

$$\frac{\tan^n A}{\sin^m\frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m\frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m\frac{C}{2}}\ge 2^m 3^{\frac{n+2}{2}}$$

<u>Giải:</u> Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{\tan^n A}{\sin^m\frac{A}{2}}+\underbrace{2^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^n\sin\frac{A}{2}+\ \dots\ +2^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^n\sin\frac{A}{2}}_{m\text{ số}}$$
$$\ge(m+1)\sqrt[m+1]{\tan^n A.\left[2^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^n\right]^m}$$

Do đó,

$$\mathrm{VT}+m2^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^n\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$\ge(m+1)2^m\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{nm}{m+1}}\left(\sqrt[m+1]{\tan^n A}+\sqrt[m+1]{\tan^n B}+\sqrt[m+1]{\tan^n C}\right)$$

Ta xét hàm số

$$f(x)=\tan^\alpha x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\alpha\ge 1$$
$$f'(x)=\alpha\tan^{\alpha+1}x+\alpha\tan^{\alpha-1}x$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha+1)\tan^{\alpha} x\,(\tan^2 x + 1) + \alpha(\alpha-1)\tan^{\alpha-2} x\,(\tan^2 x + 1) > 0$$

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}) + f(\mathrm{C}) \geq 3f\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3}\right)$$

Hay

$$\tan^{\alpha}\mathrm{A} + \tan^{\alpha}\mathrm{B} + \tan^{\alpha}\mathrm{C} \geq 3\tan^{\alpha}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{3} = 3.\left(\sqrt{3}\right)^{\alpha}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt[m+1]{\tan^n \mathrm{A}} + \sqrt[m+1]{\tan^n \mathrm{B}} + \sqrt[m+1]{\tan^n \mathrm{C}} \geq 3.\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{m+1}}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} + \sin\frac{\mathrm{B}}{2} + \sin\frac{\mathrm{C}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Do đó,

$$\mathrm{VT} \geq (m+1)2^m\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{nm}{m+1}}.3.\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{m+1}} - m2^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^n.\frac{3}{2}$$

$$= 3(m+1)2^m\left(\sqrt{3}\right)^n - 3m2^m\left(\sqrt{3}\right)^n = 3.2^m\left(\sqrt{3}\right)^n = 2^m 3^{\frac{n+2}{2}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Từ bài toán trên, ta có các bất đẳng thức tổng quát sau :

$$\frac{\tan^n \mathrm{A}}{\sin^m \mathrm{A}} + \frac{\tan^n \mathrm{B}}{\sin^m \mathrm{B}} + \frac{\tan^n \mathrm{C}}{\sin^m \mathrm{C}} \geq 2^m\sqrt{3^{2+n-m}}$$

$$\frac{\tan^n \mathrm{A}}{\cos^m \mathrm{B}} + \frac{\tan^n \mathrm{B}}{\cos^m \mathrm{C}} + \frac{\tan^n \mathrm{C}}{\cos^m \mathrm{A}} \geq 2^m 3^{\frac{n+2}{2}}$$

$$\frac{\tan^n \mathrm{A}}{\cos^m \frac{\mathrm{B}}{2}} + \frac{\tan^n \mathrm{B}}{\cos^m \frac{\mathrm{C}}{2}} + \frac{\tan^n \mathrm{C}}{\cos^m \frac{\mathrm{A}}{2}} \geq 2^m\sqrt{3^{2+n-m}}$$

Bài 37: Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng với $n \geq 2, x, y, z > 0$ thì

$$x.\tan^n \mathrm{A} + y.\tan^n \mathrm{B} + z.\tan^n \mathrm{C} \geq \frac{9.3^{\frac{n}{2}}xyz}{xy + yz + zx}$$

Giải: Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$(x.\tan^n A + y.\tan^n B + z.\tan^n C)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \left(\tan^{\frac{n}{2}} A + \tan^{\frac{n}{2}} B + \tan^{\frac{n}{2}} C\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức :

$$\tan^\alpha A + \tan^\alpha B + \tan^\alpha C \geq 3.\left(\sqrt{3}\right)^\alpha$$

Do đó,

$$x.\tan^n A + y.\tan^n B + z.\tan^n C \geq \frac{9.3^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{9.3^{\frac{n}{2}}xyz}{xy+yz+zx}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x.\tan^{\frac{n}{2}} A = y.\tan^{\frac{n}{2}} B = z.\tan^{\frac{n}{2}} C \\ \tan^{\frac{n}{2}} A = \tan^{\frac{n}{2}} B = \tan^{\frac{n}{2}} C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ A = B = C = 60^o \end{cases}$$

Bài 38: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} + \sqrt[n]{\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}} + \sqrt[n]{\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} \leq 3\sqrt[n]{\frac{2}{3}}$$

Giải: Điều cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} + \sqrt[n]{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} + \sqrt[n]{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}} \leq 3\sqrt[n]{\frac{2}{3}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \underbrace{\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3}}_{(n-1)\text{ số}} \geq n\sqrt[n]{\left(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

Do đó,

$$3-\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)+3.\frac{2}{3}(n-1) \geq n\left(\frac{2}{3}\right)^{1-\frac{1}{n}}.\text{VT}$$

Mặt khác, theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Suy ra

$$\mathrm{VT} \le 3\sqrt[n]{\frac{2}{3}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chú ý: Từ bài toán trên, ta có bất đẳng thức tổng quát sau

$$\sqrt[n]{\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt[n]{\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt[n]{\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}\le 3\sqrt[n]{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{\sin^n\frac{A}{2}}{\cos^n\frac{B}{2}\cos^n\frac{C}{2}}+\frac{\sin^n\frac{B}{2}}{\cos^n\frac{C}{2}\cos^n\frac{A}{2}}+\frac{\sin^n\frac{C}{2}}{\cos^n\frac{A}{2}\cos^n\frac{B}{2}}\ge 3.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{\cos^n\frac{A-B}{2}}{\cos^n\frac{A}{2}\cos^n\frac{B}{2}}+\frac{\cos^n\frac{B-C}{2}}{\cos^n\frac{B}{2}\cos^n\frac{C}{2}}+\frac{\cos^n\frac{C-A}{2}}{\cos^n\frac{C}{2}\cos^n\frac{A}{2}}\ge 3.\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

3.2.1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có :

a. $\frac{Aa+Bb}{A+B}+\frac{Bb+Cc}{B+C}+\frac{Cc+Aa}{C+A}\ge a+b+c$

b. $a^2\left(1-\sqrt{3}\cot A\right)+b^2\left(1-\sqrt{3}\cot B\right)+c^2\left(1-\sqrt{3}\cot C\right)\ge 0$

c. $l_a l_b l_c \le abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

d. $\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}\le\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$

(ĐHQG Hà Nội 1998)

e. $\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}$

$$\le\cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$$

(ĐHQG Hà Nội 1995)

f. $\left(1+\tan\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\right) \geq 2+\sqrt{3}+\frac{S}{p^2}$

(ĐH Ngoại Thương 1997)

g. $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq 4abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

h. $R[2(b+c)-a] \geq \sqrt{3}$

i. $\frac{1}{l_a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{l_b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{l_c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leq 3\sqrt{3}$

(ĐH Kỹ Thuật Quân Sự 1997)

j. $\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \geq 6$

k. $1+\frac{x^2}{2} \geq \cos A + x\cos B + x\cos C, \forall x \in \mathbb{R}$

l. $yz\sin^2 A + zx\sin^2 B + xy\sin^2 C \leq \frac{1}{4}(x+y+z)^2$

m. $2\cos A\sin B\sin C+\sqrt{3}(\cos B+\cos C+\sin A) \leq \frac{17}{4}$

n. $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C} \leq \sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}$

(ĐH Bách Khoa Tp.HCM 1995)

o. $\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C} \geq \sqrt{\cot\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$, ΔABC nhọn

(ĐH Ngoại Thương 1996)

p. $2(\sin A+\sin B+\sin C) > \cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)-\frac{3}{2}$

q. $\frac{2}{1+\sin A\sin B} \geq \frac{1}{1+\sin^2 A}+\frac{1}{1+\sin^2 B}$

r. $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{2r}{R}$

s. $\sqrt{\frac{15}{4}+\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)} \geq \sin A+\sin B+\sin C$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

t. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{5}{4}+\frac{1}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$, ΔABC nhọn

(Đề nghị Olympic 30-4, 2010)

3.2.2. Cho tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng với $n\in\mathbb{N}$

$$\sqrt[2000]{\tan^n A}+\sqrt[2000]{\tan^n B}+\sqrt[2000]{\tan^n C}\ge\frac{n\left(3\sqrt{3}-1\right)+6000}{2000}$$

3.2.3. Chứng minh rằng

$$S_{\mathrm{ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{\pi}\left(\frac{A}{\tan A}+\frac{B}{\tan B}+\frac{C}{\tan C}\right)\le a^2+b^2+c^2$$

3.2.4. Cho tam giác ABC có diện tích là 1. Gọi R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, chứng minh rằng

$$\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\ge 4\sqrt[4]{27}$$

3.2.5. Cho tam giác ABC có a,b,c thỏa $a^2+b^2\le c^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{5}<\frac{r}{h_c}<\frac{1}{2}$$

3.2.6. Cho tam giác ABC có 2 góc A, B thỏa

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{3}{4}\le\tan\frac{C}{2}<1$$

(ĐH Bách Khoa Hà Nội 1998)

3.2.7. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn : $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge -1$

Chứng minh rằng

$$\sin A+\sin B+\sin C\le 1+\sqrt{2}$$

3.2.8. Cho tam giác ABC có $0 < \mathrm{A} \leq \mathrm{B} \leq \mathrm{C} < 90^{\mathrm{o}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{2\cos 3\mathrm{C} - 4\cos 2\mathrm{C} + 1}{\cos \mathrm{C}} \geq 2$$

3.2.9. Cho tam giác ABC có độ dài 3 đường phân giác trong đều nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng

$$S_{\mathrm{ABC}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3.2.10. Cho tam giác ABC nhọn thì

a. $\frac{1}{3}(\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}) + \frac{2}{3}(\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}) > \pi$

b. $3\left(\tan\frac{\mathrm{A}}{2} + \tan\frac{\mathrm{B}}{2} + \tan\frac{\mathrm{C}}{2}\right) + \cot\frac{\mathrm{A}}{2}\cot\frac{\mathrm{B}}{2}\cot\frac{\mathrm{C}}{2} \geq 6\sqrt{3}$

c. $\cot \mathrm{A} + \cot \mathrm{B} + \cot \mathrm{C} + 3\sqrt{3} \leq 2\left(\frac{1}{\sin \mathrm{A}} + \frac{1}{\sin \mathrm{B}} + \frac{1}{\sin \mathrm{C}}\right)$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

3.2.1.

a. Điều cần chứng minh tương đương với

$$\left[\frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b}{\mathrm{A} + \mathrm{B}} - \frac{1}{2}(a + b)\right] + \left[\frac{\mathrm{B}b + \mathrm{C}c}{\mathrm{B} + \mathrm{C}} - \frac{1}{2}(b + c)\right] + \left[\frac{\mathrm{C}c + \mathrm{A}a}{\mathrm{C} + \mathrm{A}} - \frac{1}{2}(c + a)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\mathrm{A} - \mathrm{B})(a - b)}{\mathrm{A} + \mathrm{B}} + \frac{2(\mathrm{B} - \mathrm{C})(b - c)}{\mathrm{B} + \mathrm{C}} + \frac{2(\mathrm{C} - \mathrm{A})(c - a)}{\mathrm{C} + \mathrm{A}} \geq 0$$

b. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\sin^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{C} \geq \sqrt{3}(\sin \mathrm{A}\cos \mathrm{A} + \sin \mathrm{B}\cos \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}\cos \mathrm{C})$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C})$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{C} \geq 2\sqrt{3}\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 3\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2}$$

Mà theo bất đẳng thức cơ bản thì

$$\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra

$$3\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2} \geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

c. Áp dụng công thức độ dài trung tuyến và bất đẳng thức Cauchy

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \leq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$$

d. Cần chứng minh :

$$VT = \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$$

e. Ta có :

$$\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{C-A}{4}\cos\frac{A+C-2B}{4} \leq 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3B}{4}\right)$$

Để ý

$$0 \leq \left|\frac{1}{4}\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right| \leq \left|\frac{\pi}{4} - \frac{3B}{4}\right| < \frac{\pi}{2}$$

Do đó,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3B}{4}\right) \leq \cos\frac{1}{3}\left(B - \frac{\pi}{3}\right)$$

f. Ta đặt :

$$x = \tan\frac{A}{2}\ ,\ \ y = \tan\frac{B}{2}\ ,\ \ z = \tan\frac{C}{2}$$

$$\Longrightarrow VT = 1 + x + y + z + xy + yz + zx = 2 + x + y + z + xyz$$

Để ý rằng

$$x=\frac{S}{p(p-a)}\ ,y=\frac{S}{p(p-b)}\ ,z=\frac{S}{p(p-c)}$$

Nên $\mathrm{VT}=2+x+y+z+\frac{S}{p^2}$

Khi đó chỉ cần chứng minh $x+y+z\geq\sqrt{3}$

g. Áp dụng định lý hàm số cos, ta chứng minh

$$a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\Longrightarrow a^2\geq 4bc\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\Longrightarrow\frac{1}{\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}}\geq\frac{4bc}{a^2}$$

h. Áp dụng định lý hàm số sin, điều cần chứng minh tương đương với

$\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}-\frac{1}{2}\sin\mathrm{A}\geq\sqrt{3}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$

$\Leftrightarrow\sin\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{2}\cos\mathrm{C}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\mathrm{C}\right)+\sin\mathrm{C}\left(1-\frac{1}{2}\cos\mathrm{B}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\mathrm{B}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\sin\mathrm{B}\left[1-\cos\left(\mathrm{C}-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\sin\mathrm{C}\left[1-\cos\left(\mathrm{B}-\frac{\pi}{3}\right)\right]\geq 0$

i. Cần chứng minh

$$l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\cos\frac{\mathrm{A}}{2}$$

j. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\mathrm{VT}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}}$$

Để ý

$$\frac{\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}=\frac{(\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C})(\sin\mathrm{C}+\sin\mathrm{A})(\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B})}{\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} \sin A + \sin C \geq 2\sqrt{\sin B \sin C} \\ \sin C + \sin A \geq 2\sqrt{\sin C \sin A} \\ \sin A + \sin B \geq 2\sqrt{\sin A \sin B} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)}{\sin A \sin B \sin C} \geq 8$$

k. Ta coi điều cần chứng minh là bài toán xét dấu của tam thức bậc hai

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

l. Tương tự như câu k.

m. Ta có đẳng thức cơ bản

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2\cos A \sin B \sin C$$

Biến đổi điều phải chứng minh thành

$$\left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 0$$

n. Để ý

$$\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} \leq \sqrt{2(\cos A + \cos B)} \leq 2\sqrt{\sin\frac{C}{2}}$$

o. Để ý

$$\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt[4]{\tan A \tan B} \geq 2\sqrt[4]{\cot^2\frac{C}{2}} = 2\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$$

p. Ta đi từ

$$(1 - \sin C)(\sin A + \sin B) > 0$$

q. Ta sử dụng phép biến đổi tương đương và để ý rằng

$$\frac{1}{1 + \sin A \sin B} - \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \sin A \sin B} - \frac{1}{1 + \sin^2 B} = \frac{(\sin A - \sin B)^2}{1 + \sin A \sin B}\left[\frac{1 - \sin A \sin B}{(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)}\right]$$

r. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$p^2 \geq 2S\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow p^3 \geq 4(p-a)(p-b)(p-c)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2$$

Ta có :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{(p-a+p-b+p-c)^3}{27} = \frac{p^3}{27}$$

$$\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2 \leq \frac{27}{4}$$

s. Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2 \leq \frac{15}{4}+\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+(\cos B\cos C-\sin B\sin C) + (\cos C\cos A-\sin C\sin A)+\frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)+\frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

t. Ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\sin B+\tan\frac{B}{2}\sin A = 2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \geq 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Để ý

$$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{1}{2}\left[\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)\right] \geq 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

Hay

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} = \left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

Mặt khác

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}\Rightarrow\left[2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)-3\right]^2\ge 0$$

$$\Longrightarrow 4\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 2(3+\cos A+\cos B+\cos C)+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{5}{4}+\frac{1}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

3.2.2. Chứng minh tương tự **<u>Bài 9</u>** câu b, để ý rằng

$$3.\left(3\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{6000}}=3\left[1+\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]^{\frac{n}{6000}}\ge 3\left[1+\frac{n}{6000}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]$$

3.2.3. Ta có :

$$(A-B)(\cot A-\cot B)\le 0\Rightarrow A\cot A+B\cot B\le B\cot A+A\cot B$$

Để ý

$$2(A\cot A+B\cot B+C\cot C)\le(B+C)\cot A+(C+A)\cot B+(A+B)\cot C$$

$$\Longrightarrow 3(A\cot A+B\cot B+C\cot C)\le(A+B+C)(\cot A+\cot B+\cot C)$$

$$\Longrightarrow 3(A\cot A+B\cot B+C\cot C)\le\pi\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

3.2.4. Để ý

$$\frac{2}{R}+\frac{3}{r}=\frac{8S}{abc}+\frac{3p}{S}=\frac{8}{abc}+3p$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{2p}{3}\right)^3$$

Suy ra

$$\text{VT} \geq \frac{27}{p^3} + 3p = \frac{27}{p^3} + p + p + p \geq 4\sqrt[4]{\frac{27}{p^3}p^3} = 4\sqrt[4]{27}$$

3.2.5. Ta có :

$$\frac{r}{h_c} = \frac{c}{2p} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$4(a+b)^2 \leq 8(a^2+b^2) \leq 8c^2 < 9c^2$$

Do đó

$$\frac{r}{h_c} = \frac{c}{a+b+c} > \frac{2}{5}$$

3.2.6. Để ý

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}} = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} < 1$$

Và

$$1 = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} \geq 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} \Longrightarrow 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \geq \frac{3}{4}$$

3.2.7. Để ý

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1 \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq 0$$

Do đó, chọn góc A sao cho

$$A \geq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \frac{B+C}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

Khi đó

$$\text{VT} \leq 1 + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \leq 1 + 2\sin\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

3.2.8. Từ giả thuyết ta có $C \geq 60^o$. Do đó, bất đẳng thức tương đương với

$$8\cos^3 C - 8\cos^2 C - 8\cos C + 5 \geq 0, \cos C \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

Khi đó ta chỉ cần khảo sát hàm số

$$f(x) = 8x^3 - 8x^2 - 8x + 5, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

3.2.9. Để ý :

$$h_a \leq l_a < 1$$

Giả sử $a \leq b \leq c$. Ta suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{1}{c} \\ \widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \end{cases}$$

Mặt khác

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Longrightarrow \cos\frac{A}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{a}$$

Do

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \Longrightarrow \widehat{A} \leq \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \cos\frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3.2.10.

a. Ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

b. Ta xét hàm số

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

c. Ta xét hàm số

$$f(x) = \cot x - \frac{2}{\sin x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

3. NHẬN DẠNG TAM GIÁC VÀ TÍNH CÁC GÓC TRONG TAM GIÁC

- Đây là loại toán cơ bản được tổng kết các loại toán và từ những phương pháp trên. Khi một tam giác thỏa 1 hay 2 đẳng thức hoặc bất đẳng thức giữa các cạnh và hàm số lượng giác của các góc, ta phải tìm tính chất của tam giác đó, chẳng hạn như : tìm số đo của góc, chứng tỏ giá trị hàm lượng giác của góc, hoặc chứng minh là tam giác cân, vuông, đều…
- Một số kỹ thuật cần chú ý : nếu giả thuyết cho từ 2 hệ thức hoặc bất đẳng thức trở lên, ta phải biến đổi hệ thức dễ trước, ngoài ra ta phải để ý sử dụng bất đẳng thức ở dạng trên.

Bài 1: Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng

a. $\sin(B-A)\sin C+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$

(ĐH Mở Hà Nội 2000)

b. $\cos A=\sin B+\sin C-\frac{3}{2}$

(ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp.HCM 2001)

c. $\cos 2A+\sqrt{3}(\cos 2B+\cos 2C)+\frac{5}{2}=0$

(ĐH Sư Phạm Hà Nội 2001)

Giải:

a. Giả thuyết tương đương với

$$\sin(B-A)\sin(B+A)+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2B)+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-2\sin^2 A+1-2\cos^2 B)+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 A-\sin A+\frac{1}{4}\right)+\left(\cos^2 B-\cos B+\frac{1}{4}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin A-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin A=\frac{1}{2}\\ \cos B=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=30^o\\ B=60^o\end{cases} \Rightarrow C=90^o$$

b. Giả thuyết tương đương với

$$1+\cos A=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}=0\\ \sin\frac{B-C}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=120^o\\ B=C=30^o\end{cases}$$

c. Giả thuyết tương đương với

$$2\cos^2 A-1+2\sqrt{3}\cos(B+C)\cos(B-C)+\frac{5}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A-\sqrt{3}\cos(B-C)\cos A+\frac{3}{4}=0$$

Ta thấy đây là phương trình bậc 2 có nghiệm $\cos A$. Khi đó

$$\Delta=3\cos^2\frac{B-C}{2}-3\geq 0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{B-C}{2}\leq 0$$

Suy ra $B=C$.

Như vậy

$$\cos^2 A-\sqrt{3}\cos A+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó : $A=30^o, B=C=75^o$

Bài 2: Tính các góc của tam giác ABC biết

a. $\dfrac{\sin A}{1}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin C}{2}$

(ĐH An Ninh 1998)

b. $\cos 2A+2\sqrt{2}\cos B+2\sqrt{2}\cos C=3$ (ΔABC không tù)

(Tuyển sinh Khối A 2004)

Giải:

a. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}=\frac{\sin C}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a\sqrt{3}\\ c=2a\end{cases}$$

Theo định lý hàm số cos, ta được :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3a^2 + 4a^2 - a^2}{2a\sqrt{3}.2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A = 30^o$$

$$\cos B = \frac{4a^2 + a^2 - 3a^2}{2a.2a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow B = 60^o$$

Do đó, $C = 90^o$.

b. Giả thuyết tương đương với

$2\cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2}\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} = 3$

$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} = 2$

Mặt khác :

Do tam giác ABC không tù nên $\cos A \in [0; 1) \Longrightarrow \cos^2 A \leq \cos A$

Nên

$$2 = \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} \leq \cos A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2}$$

$\Leftrightarrow 2 \leq 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2} + \frac{1}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B - C}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{B - C}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B - C}{2} = 0 \\ \sin\frac{B - C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^o \\ B = C = 45^o \end{cases}$

Bài 3: Số đo 3 góc của tam giác ABC lập thành cấp số cộng và thỏa mãn đẳng thức

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

a. Tính các góc A, B, C.

b. Biết nửa chu vi tam giác bằng 50. Tính các cạnh của tam giác.

(ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp.HCM 1993)

Giải:

a. Giả sử $A \geq B \geq C$. Do đó, ta có :

$$A + C = 2B$$

Mặt khác : $A + B + C = 180^o \Longrightarrow \begin{cases} A + C = 120^o \\ B = 60^o \end{cases}$

Khi đó :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \sin B = 2\sin 60^o \cos\frac{A-C}{2} + \sin 60^o$$
$$= \sqrt{3}\cos\frac{A-C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Như vậy

$$\sqrt{3}\cos\frac{A-C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A - C = 60^o$$

Vậy $A = 90^o, B = 60^o, C = 30^o$.

b. Tam giác ABC vuông tại A nên ta có :

$$\begin{cases} AC = BC\sin 60^o = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} \\ AB = BC\sin 30^o = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

Mặt khác

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = 50$$

Suy ra

$$\frac{BC}{2}+BC+\frac{BC\sqrt{3}}{2}=100 \Leftrightarrow \begin{cases} BC=\dfrac{200}{3+\sqrt{3}} \\ AB=\dfrac{100}{3+\sqrt{3}} \\ AC=\dfrac{100\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \end{cases}$$

Bài 4: Xác định các góc của tam giác ABC thỏa các điều kiện sau :

$$\begin{cases} \cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2} \\ \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq 1 \end{cases}$$

(ĐH Tổng Hợp Hà Nội 1992)

Giải: Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$1-2\cos A\cos B\cos C=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq 1 \Longrightarrow \cos A\cos B\cos C\leq 0$$

Do đó, tam giác ABC tồn tại 1 góc tù hoặc vuông.

Chọn $A\geq 90^o$. Ta xét : $\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}=2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\geq 2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\leq\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Ta xét hàm số

$$f(x)=x^2-x, x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$$

$$f'(x)=2t-1>0$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến. Suy ra

$$f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Như vậy, ta được :

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^o \\ B = C = 45^o \end{cases}$$

Bài 5: Cho các góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2n+1]{\sin^2 C}$$

Biết rằng góc A, B nhọn. Hãy tính giá trị góc C.

Giải: Ta xét 3 trường hợp sau :

- $C > 90^o$ thì $\cos C < 0$. Mà theo định lý hàm số cos, ta có

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < 0 \Rightarrow a^2+b^2 < c^2$$

Mặt khác, theo định lý hàm số sin, ta suy ra :

$$\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C < \sqrt[2n+1]{\sin^2 C}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết.

- $C < 90^o$ thì $\sin^2 C < 1 \Rightarrow \sqrt[2n+1]{\sin^2 C} < 1$

Mà

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} = 1 - \cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$= 1 + \cos C \cos(A-B)$$

Vì góc C nhọn nên $\cos C > 0$ và $\cos(A-B) > 0$. Do đó,

$$\sqrt[2n+1]{\sin^2 C} = \sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \cos C\cos(A-B) > 1$$

Điều này mâu thuẫn.

- $C = 90^o$, dễ thấy giá trị này thỏa đẳng thức đã cho.

Bài 6: Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện

$$2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$

Hãy tính góc A.

(ĐH Mỏ-Địa Chất Hà Nội 1997)

Giải: Theo công thức biến đổi và định lý hàm số sin, giả thuyết tương đương với

$$\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^o$$

Bài 7: Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn hệ thức

$$\cos C\,(\sin A + \sin B) = \sin C\cos(A - B)$$

Hãy tính : $\cos A + \cos B$

Giải: Giả thuyết tương đương với

$$\cos C.\,2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos C\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\left(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left(\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

Mặt khác, do

$$\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\neq 0$$

Nên

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1\Leftrightarrow \cos A+\cos B=1$$

Bài 8: Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi có các góc thỏa mãn hệ thức

a. $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$

(ĐH Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội 1994)

b. $\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

(ĐH Dân Lập Phương Đông 1997)

c. $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$

(ĐH Thương Mại 1999)

Giải:

a. Giả thuyết tương đương với

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{4bc}$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{a^2}{4bc}\Leftrightarrow 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2=0\Leftrightarrow b=c$$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

b. Giả thuyết tương đương với

$$2(\cos^2 A+\cos^2 B)=\cos^2 A+\sin^2 A\cot^2 B+\sin^2 B\cot^2 A+\cos^2 B$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 B=\sin^2 B\cot^2 A-\cos^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A(\cot^2 A-\cot^2 B)=\sin^2 B(\cot^2 A-\cot^2 B)$$

$$\Leftrightarrow (\cot^2 A-\cot^2 B)(\sin^2 A-\sin^2 B)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot^2 A = \cot^2 B \\ \sin^2 A = \sin^2 B\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot A = \pm \cot B \\ \sin A = \sin B\end{array}\right. \Leftrightarrow A = B$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

c. Giả thuyết tương đương với

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \tan^3\frac{A}{2} - \tan^3\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)\left(\underbrace{\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1}_{>0}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Bài 9: Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi có các góc thỏa mãn hệ thức

a. $\begin{cases}\sin B = \left(\sqrt{2} - \cos C\right)\sin A \\ \sin C = \left(\sqrt{2} - \cos B\right)\sin A\end{cases}$

(ĐH Thủy Lợi Hà Nội 2000)

b. $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

(ĐH Giao Thông Vận Tải 2001)

c. $\dfrac{2(1+\cos C)}{\sin C} = \tan A + \tan B$

(ĐH Kiến Trúc Tp.HCM 2001)

Giải:

a. Ta lấy hệ thức trên trừ cho hệ thức dưới thì :

$\sin B - \sin C = \sin A\left(\cos B - \cos C\right)$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} = -2\sin A\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2}\left(\underbrace{\cos\frac{B+C}{2}+\sin A\sin\frac{B+C}{2}}_{>0}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

b. Giả thuyết tương đương với

$$\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B}+1 = \frac{2a+c}{2a-c}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos B} = \frac{2a}{2a-c} \Leftrightarrow c = 2a\cos B$$

$$\Leftrightarrow c = 2a\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right) \Leftrightarrow a = b$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

c. Giả thuyết tương đương với

$$\frac{4\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B = 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+B)+\cos(A-B) = 1-\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

<u>Bài 10:</u> Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi có các góc thỏa mãn hệ thức

a. $a\left(\cot\frac{C}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \cot\frac{C}{2}\right)$

b. $\frac{\sin^2 A}{\cos A} + \frac{\sin^2 B}{\cos B} = \frac{\sin A + \sin B}{\tan\frac{C}{2}}$

c. $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = \frac{c^2}{\tan\frac{C}{2}}$

d. $r = 4R\cos C - r_a$

<u>Giải:</u>

a. Giả thuyết tương đương với

$$a\left(\tan\frac{A+B}{2} - \tan A\right) = b\left(\tan B - \tan\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a.\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2} - A\right)}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A} = b.\frac{\sin\left(B - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a.\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos A} = b.\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}\left(\frac{2R\sin A}{\cos A} - \frac{2R\sin B}{\cos B}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{B-A}{2} = 0\\ \tan A = \tan B\end{array}\right. \Leftrightarrow A = B$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

b. Giả thuyết tương đương với

$$\sin A\tan A + \sin B\tan B = (\sin A + \sin B)\tan\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left(\tan A - \tan\frac{A+B}{2}\right) + \sin B\left(\tan B - \tan\frac{A+B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A.\frac{\sin\left(A-\frac{A+B}{2}\right)}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}+\sin B.\frac{\sin\left(B-\frac{A+B}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin A.\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A}+\sin B.\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}(\tan A-\tan B)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2}=0\\ \tan A=\tan B\end{array}\right.\Leftrightarrow A=B$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

c. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$VT=4R^2\sin^2 A.2\sin B\cos B+4R^2\sin^2 B.2\sin A\cos A=8R^2\sin A\sin B\sin(A+B)$$

$$=(2R\sin A)(2R\sin B)2\sin C=4ab.\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó,

$$4ab.\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{c^2}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4ab\sin^2\frac{C}{2}=c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab(1-\cos C)=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2ab=a^2+b^2\Leftrightarrow a=b$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

d. Ta có :

$$\begin{cases}r=(p-a)\tan\frac{A}{2}\\ r_a=p\tan\frac{A}{2}\end{cases}\Longrightarrow r+r_a=(2p-a)\tan\frac{A}{2}=(b+c)\tan\frac{A}{2}$$

Theo định lý hàm số sin, ta được

$$r+r_a=2R(\sin B+\sin C).\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=4R.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=$$

$$=4R\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2R(\cos B+\cos C)$$

Do đó,

$$2R(\cos B+\cos C)=4R\cos C\Leftrightarrow \cos B=\cos C\Leftrightarrow B=C$$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Bài 11: Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi nó thỏa mãn hệ thức

a. $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

b. $h_a = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$

c. $m_a = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$

d. $\sin^4 C + 2\sin^4 A + 2\sin^4 B = 2\sin^2 C(\sin^2 A + \sin^2 B)$

Giải:

a. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 \geq \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2}ab\sin C = S$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Do đó, tam giác ABC cân tại C.

b. Ta luôn có :

$$h_a \leq l_a$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} \frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{bc} \\ \cos\frac{A}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} \geq \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Suy ra

$$\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} \geq l_a \geq h_a$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $b = c$. Do đó, tam giác ABC cân tại A.

c. Ta có :

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{4}[b^2 + c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)] \geq \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\cos A)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\cos A) \geq \frac{1}{4}(2bc + 2bc\cos A) = \frac{1}{2}bc(1 + \cos A) = bc\cos^2\frac{A}{2}$$

Suy ra

$$m_a \geq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}\left(\text{vì} \cos\frac{A}{2} \geq 0\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $b = c$. Do đó, tam giác ABC cân tại A.

d. Theo định lý hàm số sin, giả thuyết tương đương với :

$$16R^4(c^4+2a^4+2b^4)=16R^4.2c^2(a^2+b^2)$$

$\Leftrightarrow c^4-2(a^2+b^2)c^2+2a^4+2b^4=0$

Ta thấy đây là phương trình bậc hai theo $x=c^2$, ta xét :

$$\Delta'=(a^2+b^2)^2-(2a^4+2b^4)=-(a^4-2a^2b^2+b^4)=-(a^2-b^2)^2\le 0$$

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta'=0\\ x=a^2+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại C.

Bài 12: Chứng tỏ rằng tam giác ABC vuông khi thỏa mãn hệ thức

a. $\sin 2\mathrm{A}+\sin 2\mathrm{B}=4\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}$

(ĐH Kinh Tế Tp.HCM 1990)

b. $\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{C}=\dfrac{b+c}{a}$

(ĐH Kiến Trúc Hà Nội 1997)

c. $\dfrac{b}{\cos\mathrm{B}}+\dfrac{c}{\cos\mathrm{C}}=\dfrac{a}{\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}$

(ĐH Đà Nẵng 1997)

d. $\cos\dfrac{\mathrm{A}}{2}\cos\dfrac{\mathrm{B}}{2}\cos\dfrac{\mathrm{C}}{2}-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}\sin\dfrac{\mathrm{B}}{2}\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}=\dfrac{1}{2}$

(ĐH Ngoại Thương 2001)

Giải:

a. Giả thuyết tương đương với

$2\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})=2[\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})]$

$\Leftrightarrow \sin\mathrm{C}\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\cos\mathrm{C}$

$\Leftrightarrow (1-\sin\mathrm{C})\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\cos\mathrm{C}=0$

$\Leftrightarrow \cos^2\mathrm{C}\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})+(1+\sin\mathrm{C})\cos\mathrm{C}=0$

$\Leftrightarrow \cos\mathrm{C}\left[\underbrace{\cos\mathrm{C}\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})+1+\sin\mathrm{C}}_{>0}\right]=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{C}=90^{\mathrm{o}}$

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

b. Theo định lý hàm số sin, giả thuyết tương đương với

$$\cos B + \cos C = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = 90^o$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

c. Theo định lý các hình chiếu, ta có :

$$VT = \frac{b\cos C + c\cos B}{\cos B\cos C} = \frac{a}{\cos B\cos C}$$

Nên từ giả thuyết, ta được :

$$\frac{a}{\cos B\cos C} = \frac{a}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow \cos B\cos C = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \Leftrightarrow A = 90^o$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

d. Giả thuyết tương đương với

$$\left(\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} - \left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + 1 - \sin^2\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} - \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{C}{2} \\ \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\frac{C}{2} = 1 \\ \frac{A-B}{2} = \pm\frac{C}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C = 90^o \\ A = 90^o \\ B = 90^o\end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC vuông.

Bài 13: Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu nó thỏa mãn hệ thức

a. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

(ĐH Cần Thơ 1996)

b. $\sin(A + B)\cos(A - B) = 2\sin A \sin B$

(ĐH Sư Phạm Vinh 2001)

c. $\tan 2C = \dfrac{2bc}{b^2 - c^2}$

Giải:

a. Từ giả thuyết, ta viết lại thành

$$3\cos B + 4\sin B + 2(3\sin C + 4\cos C) = 15$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B \le 5 \\ 2(3\sin C + 4\cos C) \le 10 \end{cases}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{3} = \dfrac{\cos C}{4} \end{cases} \Longrightarrow \tan B = \cot C \Longrightarrow B + C = 90^o$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b. Giả thuyết tương đương với

$\sin(A + B)\cos(A - B) = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$\Leftrightarrow \sin C \cos(A - B) = \cos(A - B) + \cos C$

Ta đặt

$$t = \tan\frac{C}{2} > 0$$

Ta được

$\dfrac{2t}{1 + t^2}.\cos(A - B) = \cos(A - B) + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$\Leftrightarrow 2t.\cos(A - B) = (1 + t^2)\cos(A - B) + 1 - t^2$

$\Leftrightarrow (t - 1)^2\cos(A - B) + 1 - t^2 = 0$

$\Leftrightarrow (1 - t)[(1 - t)\cos(A - B) + 1 + t] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ \underbrace{t[1 - \cos(A - B)]}_{>0} + \underbrace{[1 + \cos(A - B)]}_{>0} = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow t = \tan\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow C = 90^o$

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

c. Theo định lý hàm số sin, ta có

$$VP = \frac{8R^2 \sin B \sin C}{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)} = \frac{2\sin B \sin C}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$\frac{2\sin C\cos C}{\cos 2C} = \frac{2\sin B\sin C}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$\Leftrightarrow \cos C\,(\sin^2 B - \sin^2 C) = \sin B\,(\cos^2 C - \sin^2 C)$

$\Leftrightarrow \sin B\cos C\,(\sin B - \cos C) + \sin^2 C\,(\sin B - \sin C) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin B - \cos C)(\sin B\cos C + \sin^2 C) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin B = \cos C\ \ (1) \\ \sin B\cos C + \sin^2 C = 0\ (2) \end{array}\right.$

Ta xét :

$(1) \Leftrightarrow \sin B = \sin(90^o - C) \Leftrightarrow B + C = 90^o$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

(2):

- Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $\sin B = \cos C \Longrightarrow \cos^2 C + \sin^2 C = 0$. Điều này vô lý.
- Nếu tam giác ABC vuông tại B thì A, C phải nhọn và

$$\sin B = 1 \Longrightarrow \cos C + 1 - \cos^2 C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \cos C = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

  Điều này vô lý.
- Nếu tam giác ABC vuông tại C thì $\cos C = 0 \Longrightarrow \sin^2 C = 0$. Điều này vô lý.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Bài 14: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Ta có :

$$S=p(p-a)\tan\frac{A}{2}=p(p-b)\tan\frac{B}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{S^2}{p^2(p-a)(p-b)}=\frac{p-c}{p}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

Do đó, từ giả thuyết ta có :

$$\frac{1}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}\Leftrightarrow a+b=3c\Leftrightarrow p=2c\ (1)$$

Mặt khác :

$$S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow p.abc.\frac{r}{4R}=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\ (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được :

$$ab.\frac{r}{4R}=p^2-(a+b)p+ab\Rightarrow\left(1-\frac{r}{4R}\right)ab=2c^2$$

Chiều thuận: Giả sử

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{r}{4R}=\frac{1}{10}$$

Do đó,

$$ab=\frac{20}{9}c^2\Rightarrow 20a^2+20b^2-41ab=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

Xét $a \geq b$, ta có :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \\ \frac{a}{c} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Chiều nghịch: Giả sử tam giác ABC vuông tại A, ta có :

$$\begin{cases} a = 2R \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ S = \frac{1}{2}bc = pr \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} a = 2R \\ (3c - b)^2 = b^2 + c^2 \\ b = 4r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = 4r \\ c = 3r \end{cases}$$

Từ (1) ta được

$$5r = 2R \Rightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{10}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 15:</u> Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu nó thỏa mãn hệ thức

a. $\sqrt{2}\sin(B + 45^o) = \dfrac{a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c)}{2abc}$

b. $\begin{cases} \frac{r}{r_a} = \frac{1}{3} \\ \frac{r}{R} = \frac{2}{5} \end{cases}$

c. $r(\sin A + \sin B) = \sqrt{2}c.\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A - B}{2}$

Giải:

a. Ta có :

$$\mathrm{VP} = \frac{a^2b + a^2c - a^3 + b^2a + b^2c - b^3 + c^2a + c^2b - c^3}{2abc}$$
$$= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}$$
$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C}$$

Do đó, hệ thức tương đương với

$\sqrt{2} \sin(\mathrm{B} + 45^o) = \cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C}$

$\Leftrightarrow \sin \mathrm{B} + \cos \mathrm{B} = \cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C}$

$\Leftrightarrow \sin \mathrm{B} = \cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{C}$

$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} = 2 \sin \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos \frac{\mathrm{B}}{2} = \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2} \\ \frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{C} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{A} = 90^o \\ \mathrm{C} = 90^o \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A hoặc C.

b. Ta áp dụng công thức :

$$\begin{cases} r = \dfrac{S}{p} \\ r_a = \dfrac{S}{p - a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p}$$

$\Leftrightarrow p = 3(p - a) \Leftrightarrow p = \frac{3a}{2} \Leftrightarrow b + c = 2a \ (1)$

Mặt khác, ta lại có :

$$\begin{cases} S = \dfrac{abc}{4R} = pr \\ \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{4S^2}{abc.p} = \frac{2}{5}$$

Theo công thức Heron, ta suy ra

$$\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{abc.p} = \frac{1}{10}$$

$\Leftrightarrow 10 \left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{a + c - b}{2}\right)\left(\frac{a + b - c}{2}\right) = abc$

$\Leftrightarrow 5a[a-(b-c)][a+(b-c)] = 4abc$

$\Leftrightarrow a^2-(b-c)^2 = \frac{4}{5}bc$

$\Leftrightarrow 5a^2-5(b^2+c^2)+6bc = 0$

Từ (1) ta suy ra : $b^2+c^2+2bc = 4a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2 = 4a^2-2bc$. Do đó,

$$5a^2-5(b^2+c^2)+6bc = 0$$

$\Leftrightarrow 5a^2-5(4a^2-2bc)+6bc = 0 \Leftrightarrow bc = \frac{15}{16}a^2\ (2)$

Từ (1), (2); theo định lý Viète, ta có b, c là nghiệm của phương trình

$$x^2-2ax+\frac{15}{16}a^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3a}{4} \\ x = \frac{5a}{4} \end{array}\right.$$

Giả sử rằng $b \geq c$, suy ra

$$\begin{cases} b = \frac{5a}{4} \\ c = \frac{3a}{4} \end{cases} \Rightarrow a^2+\frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16} \Leftrightarrow a^2+c^2 = b^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B.

c. Ở bài toán này, ta sẽ sử dụng công thức

$$c = r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$2r\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{2}r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\ (*)$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2} = \sqrt{2}.\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}.\sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2} = \sqrt{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow A = 90^o$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Bài 16: Chứng minh nếu tam giác ABC không tù và thỏa mãn hệ thức

$$\frac{R}{m_a} = \tan\frac{\mathrm{A}}{2}$$

thì vuông cân tại A.

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

Giải: Ta có

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2 \geq 2m_a a$$

Suy ra :

$$\frac{1}{2m_a} \geq \frac{a}{b^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{a}{2m_a} \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2}$$

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{2R\sin\mathrm{A}}{2m_a} \geq \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}}{b^2 + c^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta lại có :

$$\frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}}{b^2 + c^2} = 1 - \frac{2bc\cos\mathrm{A}}{b^2 + c^2} \geq 1 - \cos\mathrm{A}$$

Do đó,

$$\Rightarrow \frac{2R\sin\mathrm{A}}{2m_a} \geq 1 - \cos\mathrm{A} \Leftrightarrow \frac{2R\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}{m_a} \geq 2\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}$$

Vì $\frac{\mathrm{A}}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$ và $\cos\frac{\mathrm{A}}{2} > 0.$ Ta được

$$\frac{R}{m_a} \geq \tan\frac{\mathrm{A}}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 17: Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thỏa mãn hệ thức

a. $3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$

b. $b + c = \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}$

c. $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$

d. $\frac{A\sin A + B\sin B}{A + B} + \frac{B\sin B + C\sin C}{B + C} + \frac{C\sin C + A\sin A}{C + A} = \sin A + \sin B + \sin C$

Giải:

a. Theo công thức tính diện tích và định lý hàm số sin, giả thuyết tương đương với

$\frac{3abc}{4R} = 2R^2\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^3 + \left(\frac{b}{2R}\right)^3 + \left(\frac{c}{2R}\right)^3\right]$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy tam giác ABC đều.

b. Trong tam giác ABC ta luôn có :

$$h_a = c\sin B = b\sin C$$

Nên từ giả thuyết ta có :

$$b + c = \frac{a}{2} + \sqrt{3}(c\sin B + b\sin C)$$

Theo định lý hàm số sin thì từ đẳng thức trên, ta có :

$$2\sin B + 2\sin C = \sin A + \sqrt{3}(\sin C\sin B + \sin B\sin C)$$

Ta viết lại đẳng thức thành

$$2\sin B + 2\sin C = \left(\sqrt{3} + 1\right)(\sin C\sin B + \sin B\sin C)$$

$\Leftrightarrow 2\sin B\,[1 - \cos(60^o - C)] + 2\sin C\,[1 - \cos(60^o - B)] = 0$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{cases} \sin B\,;\sin C > 0 \\ \cos(60^o - B)\,;\ \cos(60^o - C) \leq 1 \end{cases}$$

Do đó

$$2\sin B\,[1 - \cos(60^o - C)] + 2\sin C\,[1 - \cos(60^o - B)] \geq 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos(60^o - B) = 1\\ \cos(60^o - C) = 1\end{cases} \Leftrightarrow B = C = 60^o$$

Vậy tam giác ABC đều.

c. Theo định lý các hình chiếu, giả thuyết tương đương với

$$2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$
$$= (b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A) =$$

Hệ thức trên được viết lại thành

$$(a-b)(\cos A - \cos B) + (b-c)(\cos B - \cos C) + (c-a)(\cos C - \cos A) = 0$$

Mà trong tam giác ABC ta luôn có :

$$\begin{cases}(a-b)(\cos A - \cos B) \le 0\\ (b-c)(\cos B - \cos C) \le 0\\ (c-a)(\cos C - \cos A) \le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-b)(\cos A - \cos B) + (b-c)(\cos B - \cos C) + (c-a)(\cos C - \cos A) \le 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a = b = c\\ A = B = C\end{cases}$

Vậy tam giác ABC đều.

d. Theo định lý hàm số sin, giả thuyết tương đương với

$$\frac{Aa + Bb}{A + B} + \frac{Bb + Cc}{B + C} + \frac{Cc + Aa}{C + A} = a + b + c$$

Hệ thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(A-B)(a-b)}{(A+B)(a+b)} + \frac{(B-C)(b-c)}{(B+C)(b+c)} + \frac{(C-A)(c-a)}{(C+A)(c+a)}\right] = 0$$

Mà trong tam giác ABC ta luôn có :

$$\begin{cases}(A-B)(a-b) \ge 0\\ (B-C)(b-c) \ge 0\\ (C-A)(c-a) \ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(A-B)(a-b)}{(A+B)(a+b)} + \frac{(B-C)(b-c)}{(B+C)(b+c)} + \frac{(C-A)(c-a)}{(C+A)(c+a)} \ge 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a = b = c\\ A = B = C\end{cases}$.

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 18: Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thỏa mãn hệ thức

a. $\begin{cases} \sin A + \sin B \geq 2\sin C \\ \cos A + \cos B \geq 2\cos C \end{cases}$

b. $\begin{cases} \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 \\ \cos A \cos B = \sin^2 \dfrac{C}{2} \end{cases}$

(ĐH Kiến Trúc Hà Nội 1997)

c. $\begin{cases} \cos B \cos C = \dfrac{1}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$

(ĐH Ngoại Ngữ Hà Nội 1997)

d. $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \tan B + \tan C = 2\tan A \end{cases}$

(ĐH Sư Phạm Vinh 1999)

Giải:

a. Ta kí hiệu

$$\begin{cases} \sin A + \sin B \geq 2\sin C \ (1) \\ \cos A + \cos B \geq 2\cos C \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta nhận xét C không là góc lớn nhất vì nếu C lớn nhất thì cạnh đối diện c cũng lớn nhất và theo định lý hàm số sin, ta sẽ có

$$\begin{cases} \sin C > \sin A \\ \sin C > \sin B \end{cases} \Longrightarrow 2\sin C > \sin A + \sin B$$

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết.

Vậy C phải là góc nhọn. Ta được : $\cos A > 0$ nên 2 vế của 2 bất đẳng thức (1) và (2) đều dương. Do đó

$$\begin{cases} (\sin A + \sin B)^2 \geq 4\sin^2 C \\ (\cos A + \cos B)^2 \geq 4\cos^2 C \end{cases}$$

$\Longrightarrow (\sin A + \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 \geq 4(\sin^2 C + \cos^2 C)$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cos(A - B) \geq 4$

$\Leftrightarrow \cos(A - B) \geq 1$

Vì $\cos(A - B) \leq 1$ nên $\cos(A - B) = 1$.

Vậy $A = B$.

Từ (1) ta có $\sin A \geq \sin C \Leftrightarrow a \geq c \Leftrightarrow A \geq C$

Mặt khác, do hàm số $f(x) = \cos x$ nghịch biến trong khoảng $(0, \pi)$ nên từ (2) ta có

$$\cos A \geq \cos C \Longrightarrow A \leq C$$

Như vậy, $A = C$.

Tóm lại, ta chứng minh được tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$\cos A \cos B = \sin^2 \dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] = \dfrac{1}{2}(1 - \cos C)$

$\Leftrightarrow -\cos C + \cos(A-B) = 1 - \cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

Khi đó,

$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3A + \sin(540^o - 6A) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3A + \sin 6A = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3A\,(1 + \cos 3A) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3A = 0 \\ \cos 3A = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow A = 60^o$

Vậy tam giác ABC đều.

c. Ta có :

$a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \Leftrightarrow a^3 - a^2(b+c) = a^3 - b^3 - c^3$

$\Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2(b+c)$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^o$

Mặt khác,

$\cos B \cos C = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\cos A + \cos(B-C) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B = C$

Vậy tam giác ABC đều.

d. Ta có :

$\sin B + \sin C = 2\sin A \Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

Mặt khác,

$\tan B + \tan C = 2\tan A \Leftrightarrow \dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = 2\tan A$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin A}{\cos B\cos C} = 2.\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$\Leftrightarrow \cos A = 2\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos A = -\cos A + \cos(B-C)$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{B-C}{2} - 1$

Do ta đã có

$$\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

Nên

$$2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) = 8\sin^2\frac{A}{2} - 1 \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A = 60^o$$

Do đó,

$$\cos\frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow B = C$$

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 19: Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thỏa mãn hệ thức

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$

(Học viện Bưu Chính Viễn Thông 1997)

b. $\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{\sin C} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}} \\ a^2(b+c-a) = b^3 + c^3 - a^3 \end{cases}$

(ĐH Y Thái Bình 2000)

c. $\begin{cases} A, B, C \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ p^2 = ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C \end{cases}$

Giải:

a. Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Giả thuyết tương đương với

$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin A \sin B \sin C$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta lại có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C.

Vậy tam giác ABC đều.

b. Từ $a^2(b+c-a) = b^3+c^3-a^3$, ta suy ra được

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Theo định lý hàm số cos thì

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^o$$

Mặt khác

$\frac{1+\cos C}{\sin C} = \frac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos C}{\sin C}\right)^2 = \frac{(2a+b)^2}{4a^2-b^2} = \frac{2a+b}{2a-b}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)^2 = \frac{2a+b}{2a-b} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2a+b}{2a-b}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \frac{2a+b}{2a-b} \Leftrightarrow \frac{b}{2a} = \cos C$

$\Leftrightarrow \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab} = \frac{b}{2a}$

$\Leftrightarrow a = c$

Vậy tam giác ABC đều.

c. Giả thuyết tương đương với

$$(a+b+c)^2 = 2ab(1-\cos 2A) + 2bc(1-\cos 2B) + 2ca(1-\cos 2C)$$

$\Leftrightarrow a^2 + 2(b\cos 2A + c\cos 2C)a + b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B = 0$ (1)

Ta xét :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (b\cos 2A + c\cos 2C)^2 - b^2 - c^2 - 2bc\cos 2B\\ &= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc[\cos 2A\cos 2C - \cos(2A) + 2C]\\ &= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc\sin 2A\sin 2C\\ &= -(b\sin 2A - c\sin 2C)^2 \le 0\end{aligned}$$

Do đó,

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b\cos 2A - c\cos 2C \\ b\sin 2A = c\sin 2C \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2\cos^2 2A + c^2\cos^2 2C + 2bc\cos 2A\cos 2C \\ 0 = b^2\sin^2 2A + c^2\sin^2 2C - 2bc\sin 2A\sin 2C \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(2A + 2C)$

$\Leftrightarrow \cos 2B = -\cos A = \cos(\pi - A)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2B = \pi - A + k2\pi \ (2) \\ 2B = A - \pi + k2\pi \ (3) \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta thấy :

$(2) \Leftrightarrow B - C = k2\pi$

Do $k \in \mathbb{Z}$ và $|B - C| < \pi \Leftrightarrow |k2\pi| < \pi \Leftrightarrow k = 0$. Suy ra : $B = C$

$(3) \Leftrightarrow 2B - A = (2k - 1)\pi$

Do $k \in \mathbb{Z}$ và $0 < A, B < \pi$ nên $k = 1$. Suy ra : $2B = A + \pi$.

Vậy B tù, điều này mâu thuẫn giả thuyết.

Do đó, từ hệ thức $b\sin 2A = c\sin 2C$, ta được :

$-\sin B\sin 4B = \sin B\sin 2B$

$\Leftrightarrow \cos 2B = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos B = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow B = 60^{o}$

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 20: Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thỏa mãn hệ thức

a. $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \dfrac{2p}{9R}$

(ĐH Y Dược Tp.HCM 2001)

b. $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} - 2 = \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}$

c. $\begin{cases} C \le B \le A \le 90^{o} \\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C + 4\sin\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} \end{cases}$

Giải:

a. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\begin{aligned} a\cos A + b\cos B + c\cos C &= R(2\cos A\sin A + 2\cos B\sin B + 2\cos C\sin C) \\ &= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \end{aligned}$$

Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C} = 4\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$$

Do đó,

$$a\cos \mathrm{A} + b\cos \mathrm{B} + c\cos \mathrm{C} = 4R\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy thì :

$$\begin{aligned} a\sin \mathrm{B} + b\sin \mathrm{C} + c\sin \mathrm{A} &= R(2\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B} + 2\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C} + 2\sin \mathrm{C}\sin \mathrm{A}) \\ &\geq 3R\sqrt[3]{8\sin^2 \mathrm{A}\sin^2 \mathrm{B}\sin^2 \mathrm{C}} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a\cos \mathrm{A} + b\cos \mathrm{B} + c\cos \mathrm{C}}{a\sin \mathrm{B} + b\sin \mathrm{C} + c\sin \mathrm{A}} \leq \frac{4R\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}{6R\sqrt[3]{\sin^2 \mathrm{A}\sin^2 \mathrm{B}\sin^2 \mathrm{C}}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}$$

Trong khi đó :

$$\frac{2p}{9R} = \frac{a+b+c}{9R} = \frac{2R(\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})}{9R} \geq \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sin \mathrm{A} = \sin \mathrm{B} = \sin \mathrm{C}$.

Vậy tam giác ABC đều.

b. Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\mathrm{VT} = 2 + 2\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} - 2 = 2\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$8\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} = \cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 64\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$= 8\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C} = (\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B})(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})(\sin \mathrm{C} + \sin \mathrm{A})$$

$$\Leftrightarrow 8abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy tam giác ABC đều.

c. Ta có :

$$\begin{aligned} 4\sin\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2} &= 2\sin\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\left(\cos\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}-2\mathrm{B}}{2} - \cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}-2\mathrm{B}}{2} - 2\sin\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2} \end{aligned}$$

$$= \sin(C - B) + \sin(B - A) + \sin(A - C)$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$
$$= \sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A) + \sin(C - B) + \sin(B - A) + \sin(A - C)$$
$$\Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C = \sin B \cos A + \sin C \cos B + \sin A \cos C$$
$$\Leftrightarrow \sin A (\cos A - \cos C) + \sin B (\cos B - \cos A) + \sin C (\cos C - \cos B) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\sin A [(\cos B - \cos A) + (\cos C - \cos B)] + \sin B (\cos B - \cos A) + \sin C (\cos C - \cos B) = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(\cos B - \cos A)}_{\geq 0}\underbrace{(\sin B - \sin A)}_{\leq 0} + \underbrace{(\cos C - \cos B)}_{\geq 0}\underbrace{(\sin C - \sin A)}_{\leq 0} = 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 21: Chứng minh tam giác ABC khi thỏa mãn đẳng thức sau

a. $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{9}{8}$

b. $a + b + c = 2\sqrt{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

c. $\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} = 2\cos\frac{A - B}{2}$

(Olympic 30-4, 2007)

d. $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải:

a. Ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B + C}{2} + \cos\frac{B - C}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(1 - \cos A) + \frac{1}{4}(\cos B + \cos C)$$

Tương tự vậy, ta có :

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}(1-\cos B) + \frac{1}{4}(\cos A + \cos C)$$
$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{1}{4}(1-\cos C) + \frac{1}{4}(\cos A + \cos B)$$

Do đó,

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \frac{1}{4}(3+\cos A + \cos B + \cos C)$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(3+\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C.

Vậy tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}a = \sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2} \\ \dfrac{3}{2}b = \sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2} \\ \dfrac{3}{2}c = \sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{3}{2}(a+b+c) = \sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2} + \sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2} + \sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}$$

Khi đó, theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta được :

$$\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2} + \sqrt{2(m_c^2+m_a^2)-m_b^2} + \sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}$$
$$\leq \sqrt{3}.\sqrt{3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}$$

Hay

$$a+b+c \leq 2\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $m_a = m_b = m_c$.

Vậy tam giác ABC đều.

c. Ta có:

$$\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} = 2\sin\frac{3(A+B)}{4}\cos\frac{3(A-B)}{4}$$

Ta dự đoán :

$$\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} \leq 2\cos\frac{A-B}{2}$$

Vậy thì ta cần chứng minh

$$0 \le \cos\frac{3(A-B)}{4} \le \cos\frac{A-B}{2}\ (*)$$

Ta có :

$$\cos\frac{A-B}{2} \ge 0 \Rightarrow 2\sin\frac{3(A+B)}{4}\cos\frac{3(A-B)}{4} \ge 0 \Rightarrow \cos\frac{3(A-B)}{4} \ge 0\ (**)$$

$$\left(\text{do}\sin\frac{3(A+B)}{4} \ge 0\right)$$

Lại có :

$$0 \le \frac{|A-B|}{2} \le \frac{3|A-B|}{4} \le \pi$$

$$\Longrightarrow \cos\frac{|A-B|}{2} \ge \cos\frac{3|A-B|}{4} \Longrightarrow \cos\frac{(A-B)}{2} \ge \cos\frac{3(A-B)}{4}\ (***)$$

Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$, ta có :

$$\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} \le 2\cos\frac{A-B}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi tam giác ABC đều.

d. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta được :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Do đó,

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C.
Vậy tam giác ABC đều.

Bài 22: Chứng tỏ rằng tam giác ABC đều nếu

a. $m_a+m_b+m_c=\frac{9R}{2}$

b. $\frac{a}{m_a}=\frac{b}{m_b}=\frac{c}{m_c}$

c. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{27}{8p}$

d. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{18R}{ab+bc+ca}$

Giải:

a. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$(m_a+m_b+m_c)^2\leq 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{cases} m_a^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}\\ m_b^2=\dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}\\ m_c^2=\dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}\end{cases}\Longrightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Do đó,

$$(m_a+m_b+m_c)^2\leq\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Theo định lý hàm số sin và bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\leq 4R^2.\frac{9}{4}=9R^2$$

Khi đó

$$(m_a+m_b+m_c)^2\leq\frac{81}{4}R^2$$

Hay

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} A = B = C \\ m_a = m_b = m_c \end{cases}$.

Vậy tam giác ABC đều.

b. Ta có :

$$\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2(2a^2 + 2c^2 - b^2) = b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^4 + 2a^2c^2 - a^2b^2 = 2b^4 + 2b^2c^2 - b^2a^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Tương tự vậy, ta có :

$$\frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c} \Leftrightarrow b = c$$

Vậy tam giác ABC đều.

c. Theo định lý hàm số cos, ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{4bc}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

Tương tự, ta được :

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{B}{2} = \dfrac{p(p-b)}{ca} \\ \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{p(p-c)}{ab} \end{cases}$$

Do đó,

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{p(p-a)}{abc} + \frac{p(p-b)}{abc} + \frac{p(p-c)}{abc} = \frac{p^2}{abc}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$p^3 = \frac{(a+b+c)^3}{8} \geq \frac{27}{8}abc$$

Hay

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{p^2}{abc} \geq \frac{27}{8p}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Vậy tam giác ABC đều.
d. Ta có :

$$\begin{cases} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{2S} \\ \frac{18R}{ab+bc+ca} = \frac{18abc}{4S(ab+bc+ca)} = \frac{9}{2S} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \end{cases}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 9$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta lại có :

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases} \Longrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Vậy tam giác ABC đều.

Bài 23: Xác định đặc điểm của tam giác ABC nếu nó thỏa mãn hệ thức

a. $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$

b. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$

c. $\begin{cases} S = 1 \\ \sqrt{3}(a+b+c)^2 = 36 \end{cases}$

(ĐH Luật Hà Nội 1995)

Giải:
a. Ta có :

$$\begin{cases} \sin 6A + \sin 6B = 2\sin 3(A+B)\cos 3(A-B) \\ \sin 6C = -2\sin 3(A+B)\cos 3(A+B) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = -2\sin 3(A+B)\left[\cos 3(A-B) - \cos 3(A+B)\right]$$
$$= -2\sin 3C\,(-2\sin 3A \sin 3B) = 4\sin 3A \sin 3B \sin 3C$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$4\sin 3A \sin 3B \sin 3C = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3A = 0 \\ \sin 3B = 0 \\ \sin 3C = 0 \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^o hoặc120^o.

b. Giả thuyết tương đương với

$$\left(\sin A-\sqrt{3}\cos A\right)+\left(\sin B-\sqrt{3}\cos B\right)+\left(\sin C-\sqrt{3}\cos C\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.$$

Ta xét :

$$\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\Longrightarrow A=60^{o}$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^{o}.

c. Theo công thức Heron và bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$1=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\leq p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

Do đó,

$$\frac{p^4}{27}\geq 1$$

Suy ra

$$p^2\geq 3\sqrt{3}$$

Hay

$$\sqrt{3}(a+b+c)^2\geq 36$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 24: Nhận dạng tam giác nếu biết rằng

$\tan\frac{A}{4};\tan\frac{B}{4}$ là nghiệm của phương trình $x^2+a_1x+b_1=0$

$\tan\frac{B}{4};\tan\frac{C}{4}$ là nghiệm của phương trình $x^2+a_2x+b_2=0$

$\tan\frac{C}{4};\tan\frac{A}{4}$ là nghiệm của phương trình $x^2+a_3x+b_3=0$

Và $(1-a_1+b_1)(1-a_2+b_2)(1-a_3+b_3)=5616-3240\sqrt{3}$

Giải: Từ giả thuyết, ta có :

$$\begin{cases} x^2+a_1x+b_1=\left(x-\tan\frac{A}{4}\right)\left(x-\tan\frac{B}{4}\right)\\ x^2+a_2x+b_2=\left(x-\tan\frac{B}{4}\right)\left(x-\tan\frac{C}{4}\right)\\ x^2+a_3x+b_3=\left(x-\tan\frac{C}{4}\right)\left(x-\tan\frac{A}{4}\right)\end{cases}$$

Lấy $x=-1$, ta có :

$$(1-a_1+b_1)(1-a_2+b_2)(1-a_3+b_3)=\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)^2\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)^2\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)^2$$
$$=\left[1+\left(\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}\right)+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right]^2$$

Mặt khác :

$$\tan\left(\frac{B+C}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\Rightarrow\frac{\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}}{1-\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{A}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{A}{4}}$$

$$\Rightarrow\left(\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\right)\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)=\left(1-\tan\frac{A}{4}\right)\left(1-\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$
$$=1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

$$\Rightarrow(1-a_1+b_1)(1-a_2+b_2)(1-a_3+b_3)=4\left(1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2$$

Do $\frac{A}{4};\frac{B}{4};\frac{C}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\tan\frac{A}{4};\tan\frac{B}{4};\tan\frac{C}{4}\in(0;1)\Rightarrow\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\in(0;1)$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$1+x^3=1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

$$=\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}=3x+3x^2$$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})\geq 0$

$\Leftrightarrow 0<x\leq 2-\sqrt{3}$

Do đó,

$$(1-a_1+b_1)(1-a_2+b_2)(1-a_3+b_3)=4(1+x^3)^2\leq 4\left[1+\left(2-\sqrt{3}\right)^3\right]^2$$

$$=5616-3240\sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 25: Tìm tất cả các đặc điểm của tam giác ABC đồng thời thỏa điều kiện

a. $\begin{cases} S=a^2-(b-c)^2 \\ \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\cot A+\cot B+\cot C \end{cases}$

b. $(1+b+c-bc)\cos A+(1+c+a-ca)\cos B+(1+a+b-ab)\cos C=3$

c. $\begin{cases} \dfrac{3^{\sin A}}{3^{\sin B}}+4\sin A=1+4\sin B \\ \dfrac{3^{\sin A}}{3^{\sin C}}+4\sin C=1+4\sin A \end{cases}$

d. $\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{3(\sin A+\sin B+\sin C)}{\cos A+\cos B+\cos C}$

Giải:

a. Theo định lý hàm số cot, ta có :

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Theo định lý hàm số sin, ta được :

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{4R^2}{4S}(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

Do $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\cot A+\cot B+\cot C$ nên $S=R^2$.

Theo định lý hàm số sin, ta lại có :

$$R^2 = S = a^2 - (b-c)^2 = 4R^2[\sin^2 \mathrm{A} - (\sin \mathrm{B} - \sin \mathrm{C})^2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = (\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} - \sin \mathrm{C})(\sin \mathrm{A} - \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})$$

$$= \left(2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} - 2\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}\right)\left(2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2} - 2\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\mathrm{C}}{2}\left(\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} - \cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)2\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\left(\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2} - \cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}\right)$$

$$= 16\cos\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}$$

Do đó,

$$4\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{1}{4}$$

Mặt khác, theo định lý hàm số sin, ta lại có :

$$\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C} = \frac{abc}{8R^3} = \frac{S.4R}{8R^3} = \frac{1}{2}$$

Nên

$$\frac{1}{16} = \frac{\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}}{2\sin \mathrm{A}} = \frac{1}{4}\tan\frac{\mathrm{A}}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{1}{4}$$

Ta biết rằng

$$\frac{1}{2\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}} = \sin \mathrm{A} = \frac{\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}} = \frac{8}{17} \Longrightarrow \sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C} = \frac{17}{16} > 1$$

Điều này không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại tam giác ABC thỏa mãn hai hệ thức đã cho.

b. Từ giả thuyết, ta viết lại thành

$$\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C} + (a\cos \mathrm{B} + b\cos \mathrm{A}) + (b\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{B}) + (a\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{A}) - (bc\cos \mathrm{A} + ca\cos \mathrm{B} + ab\cos \mathrm{C}) = 0$$

Theo định lý các hình chiếu và định lý hàm số cos, ta có :

$$\begin{cases} (a\cos \mathrm{B} + b\cos \mathrm{A}) + (b\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{B}) + (a\cos \mathrm{C} + c\cos \mathrm{A}) = c + a + b \\ bc\cos \mathrm{A} + ca\cos \mathrm{B} + ab\cos \mathrm{C} = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C} = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c) + 3$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Nên

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3\geq\frac{1}{6}(a+b+c)^2-(a+b+c)+3$$
$$=\frac{1}{6}(a+b+c-3)^2+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

Do đó, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy tam giác ABC đều, có độ dài các cạnh bằng 1.

c. Hệ đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases}3^{\sin A-\sin B}+4(\sin A-\sin B)=1\ (1)\\3^{\sin A-\sin C}-4(\sin A-\sin C)=1\ (2)\end{cases}$$

Xét (1), ta đặt $u=\sin A-\sin B$. Khi đó :

$$3^u+4u=1$$

Ta xét hàm số

$$f(u)=3^u+4u,u\in\mathbb{R}$$
$$f'(u)=3^u\ln 3+4>0$$

Do đó, hàm số đồng biến.

Ta thấy $u=0$ là nghiệm của phương trình và VP là hàm hằng nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Suy ra : $\sin A=\sin B\Leftrightarrow A=B$

Xét (2), ta đặt $v=\sin A-\sin C$. Khi đó :

$$3^v-4v=1$$

Ta xét hàm số

$$f(v)=3^v-4v,v\in\mathbb{R}$$
$$f'(v)=3^v\ln 3-4$$
$$f''(v)=3^v\ln^2 3>0$$

Suy ra $v=0$ và $v=2$ là hai nghiệm duy nhất của phương trình.

Với $v=0$ thì $\sin A=\sin C\Leftrightarrow A=C$.

Với $v=2$ thì $\sin A=\sin C+2>2$ (vô lý).

Vậy tam giác ABC đều.

d. Theo các đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\begin{cases}\sin A+\sin B+\sin C>0\\\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1\\\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\end{cases}$$

Kết hợp với giả thuyết, ta suy ra

$$\tan A \tan B \tan C > 0$$

Tương đương tam giác ABC nhọn.

Giả sử :

$$0 < C \leq B \leq A < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \tan A \geq \tan B \geq \tan C > 0 \\ 0 < \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có :

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} . \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geq \frac{\tan A \cos A + \tan B \cos B + \tan C \cos C}{3}$$

Ta viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \frac{3(\sin A + \sin B + \sin C)}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 26: Tìm đặc điểm của tam giác ABC nếu nó thỏa mãn điều kiện

a. $27(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 256bcR^2$

b. $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c = p^2$

c. $\dfrac{A^{2012} + B^{2012} + C^{2012}}{3} = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{2012}$

d. $\dfrac{4 \sin A \sin B \sin C}{ab + bc + ca} = \dfrac{a + b + c}{18R^3}$

Giải:

a. Theo định lý hàm số cos, ta có :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C \end{cases}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$27.2ac \cos B . 2ab \cos C = 256bcR^2 \Leftrightarrow a^2 \cos B \cos C = \frac{64R^2}{27}$$

Theo định lý hàm số sin, ta viết hệ thức trên thành

$$\cos B \cos C \sin^2 A = \frac{16}{27}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\cos B \cos C \sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 A)[\cos(B - C) - \cos A]$$

$$\leq \frac{1}{2}(1 - \cos^2 A)(1 - \cos A) = \frac{1}{4}(2 + 2\cos A)(1 - \cos A)(1 - \cos A)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{2+2\cos A+1-\cos A+1-\cos A}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$$

Do đó, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos(B-C)=1\\ 2+2\cos A=1-\cos A\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}B=C\\ \cos A=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy tam giác ABC cân tại A và thỏa mãn $\cos A=-\dfrac{1}{3}$

b. Ta có :

$$\begin{cases}r_a=\dfrac{S}{p-a}=\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}\\ l_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$r_al_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}p\sqrt{(p-b)(p-c)}\leq\frac{b+c}{b+c}.p\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{ap}{2}$$

Tương tự, ta được :

$$\begin{cases}r_bl_b\leq\dfrac{bp}{2}\\ r_cl_c\leq\dfrac{cp}{2}\end{cases}$$

Do đó,

$$r_al_a+r_bl_b+r_cl_c\leq p^2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy tam giác ABC đều.

c. Ta xét hàm số

$$f(x)=x^{2012},x\in(0;\pi)$$
$$f'(x)=2012x^{2011}$$
$$f''(x)=2012.2011.x^{2010}>0$$

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\geq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2012}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C.

Vậy tam giác ABC đều.

d. Theo định lý hàm số sin và đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\frac{a+b+c}{18R^3}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{9R^2}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{9R^2}$$

Do đó, giả thuyết tương đương với

$$72R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=ab+bc+ca$$

Mặt khác, ta lại có kết quả sau :

$$\begin{cases} r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow Rr=\frac{abc}{4p} \end{cases}$$

Nên hệ thức trên được viết lại thành

$18Rr=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 18.\frac{abc}{4p}=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 9abc=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \end{cases}$$

$\Rightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c)\geq 9abc$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 27: Tìm đặc điểm của tam giác ABC nếu nó thỏa mãn đẳng thức

a. $\begin{cases} \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C<1 \\ \sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=4ab\cos A\sin B \\ \sin 2A+\sin 2B=4\sin A\sin B \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^t C \\ A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);t\in(0;2) \end{cases}$

Do đó,

$$\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{A}{2} = 0 \\ \cos\frac{B}{2} = 0 \\ \cos\frac{C}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{5} \vee A = \frac{3\pi}{5} \\ B = \frac{\pi}{5} \vee B = \frac{3\pi}{5} \\ C = \frac{\pi}{5} \vee C = \frac{3\pi}{5} \end{array}\right.$$

Mặt khác, theo đẳng thức cơ bản ta có :

$$1 - 2\cos A\cos B\cos C = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C > 0$$

Suy ra, ta chọn

$$\left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{5} \\ B = \frac{\pi}{5} \\ C = \frac{\pi}{5} \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc 36^o.

b. Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4ab\cos A\sin B$$

$\Leftrightarrow \sin^2 A \,.\, 2\sin B\cos B + \sin^2 B \,.\, 2\sin A\cos A = 4\sin A\cos A\sin B\cos B$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B - \sin B\cos A = 0$

$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

Khi đó, thay $A = B$ vào hệ thức $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$. Ta được :

$$2\sin 2A = 4\sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \sin A \Leftrightarrow A = 45^o$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại C.

c. Từ đẳng thức cơ bản :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Ta suy ra : $\sin^t C + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

Mà $0 < \sin C \leq 1 \Longrightarrow \sin^t C + \sin^2 C \leq 2$

$\Longrightarrow 2 + 2\cos A\cos B\cos C \leq 2$

$\Longrightarrow \cos A\cos B\cos C \leq 0$

$\Longrightarrow \cos C \leq 0$

Mặt khác cũng từ : $0 < \sin C \leq 1 \Longrightarrow \sin^t C \geq \sin^2 C$

$\Longrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$

$\Longrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Longrightarrow \cos C \geq 0$

Do đó, $\cos C = 0 \Leftrightarrow C = 90^o$.

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Bài 28: Tìm tất cả các tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là các số nguyên dương, không có ước chung và thỏa mãn đẳng thức

$$\cot^2\frac{A}{2}+4\cot^2\frac{B}{2}+9\cot^2\frac{C}{2}=\left(\frac{6p}{7r}\right)^2$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải:

Ta có công thức :

$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$\Longrightarrow r^3\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=(p-a)(p-b)(p-c)$$

Mà theo công thức Heron, ta lại có :

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=\frac{p^2r^2}{p}=pr^2$$

Do đó,

$$\frac{p}{r}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ (*)$$

Kết hợp với giả thuyết, ta được

$$49\left(\cot^2\frac{A}{2}+4\cot^2\frac{B}{2}+9\cot^2\frac{C}{2}\right)=36\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^2$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$36\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^2\le 49\left(\cot^2\frac{A}{2}+4\cot^2\frac{B}{2}+9\cot^2\frac{C}{2}\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\cot\frac{A}{2}}{6}=\frac{2\cot\frac{B}{2}}{3}=\frac{3\cot\frac{C}{2}}{2}$$

Kết hợp với $(*)$, ta có :

$$\begin{cases}\cot\frac{A}{2}=7\\ \cot\frac{B}{2}=\frac{7}{4}\\ \cot\frac{C}{2}=\frac{7}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin A=\frac{7}{25}\\ \sin B=\frac{56}{65}\\ \sin C=\frac{63}{65}\end{cases}$$

Chú ý: Đến đây, cơ bản bài toán đã hoàn thành, nhưng ta có thể có được một kết quả đẹp hơn nữa bằng việc áp dụng định lý hàm số sin, khi đó :

$$\frac{25a}{7}=\frac{65b}{56}=\frac{65c}{63}$$

Ta chọn : $a=13, b=40, c=45$.

Vậy tam giác ABC có 3 cạnh thỏa mãn hệ thức :

$$a:b:c=13:40:45$$

Bài 29: Xác định hình dạng của tam giác ABC có 3 góc $\mathrm{A, B, C}$ thỏa mãn

$$4\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=\tan A\tan B\tan C$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

Giải:

Do $\frac{A}{2};\frac{B}{2};\frac{C}{2}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\tan A\tan B\tan C=4\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)>0$$

Do đó, tam giác ABC nhọn. Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

Ta có thể giả sử :

$$0<A\leq B\leq C<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\leq 0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Mà

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B}{2}+\sin\left(\frac{A-C}{2}\right)\right]\leq\frac{1}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Suy ra :

$$4\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\leq 4\cos\frac{B}{2}+2\sin B$$

Ta xét hàm số

$$f(x)=4\cos\frac{x}{2}+2\sin x\,, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=2\left(\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được

$$f(x) \leq 3\sqrt{3}$$

Do đó,

$$4\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right) \leq 4\cos\frac{B}{2} + 2\sin B \leq 3\sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = C \\ B = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC đều.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

3.3.1. Tính các góc của tam giác ABC nếu nó thỏa mãn

a. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$

(ĐH Công Đoàn 2001)

b. $(1 + \cot A)(1 + \cot B) = 2$

(ĐH Vinh 2000)

c. $\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$

(ĐH An Ninh 2000)

d. $\begin{cases} b^2 + c^2 \leq a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

(ĐH Ngoại Thương Tp.HCM 1998)

e. $\begin{cases} C = \min\{A, B, C\} \geq \dfrac{\pi}{4} \\ \cos A + \cos B \geq \cos(A - B) \end{cases}$

3.3.2. Hãy xác định các góc của tam giác ABC**,** biết rằng

$$\cos\frac{5A}{2} + \cos\frac{5B}{2} + \cos\frac{5C}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

3.3.3. Tính các góc của tam giác nhọn ABC biết

$$\frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) + 2\cos A\cos B\cos C = \frac{3}{4}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

3.3.4. Tính số đo các góc của tam giác ABC có diện tích S và các cạnh a, b, c thỏa mãn hệ thức :

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)(a^2 + b^2) + c^2 = 4S$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

3.3.5. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng

$$b\sin C\,(b\cos C + c\cos B) = 20$$

3.3.6. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn

$$\cos\frac{C}{2}\cos(A - B) + \cos C\cos\frac{A - B}{2} = 0$$

Tính $\sin A + \sin B$.

3.3.7. Chứng minh tam giác ABC cân khi các góc thỏa mãn hệ thức

a. $\dfrac{\sin A}{\cos B} = 2\sin C$

b. $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$

c. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \dfrac{1}{2}(\tan A + \tan B)$

d. $\tan A + 2\tan B = \tan A \tan^2 B$

e. $\dfrac{2\sin A \sin B}{\sin C} = \cot\dfrac{C}{2}$

f. $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) = 0$

g. $a = a\cos 2B + 2b\sin 2B \sin C$

h. $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin C$

i. $\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\cos B \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B \end{cases}$

3.3.8. Chứng minh tam giác ABC vuông khi nó thỏa mãn hệ thức

a. $\cot\dfrac{B}{2} = \dfrac{a + c}{b}$

b. $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \cos A + \cos B + \cos C$

c. $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

d. $S = \dfrac{1}{4}(a + b - c)(a + b + c)$

e. $\dfrac{1}{\sin A} + \cot A = \dfrac{c + b}{a}$

f. $\sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \cos^2 C$

g. $\tan\dfrac{C - B}{2} = \dfrac{c - b}{c + b}$

h. $\left(\dfrac{b - c}{b}\right)^2 = \dfrac{4\sin^2\dfrac{B - C}{2}}{1 - \cos 2B}$

i. $h_a = 2\sqrt{2}p.\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

3.3.9. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu nó thỏa mãn hệ thức

a. $\sin A + \sin B + \sin C = \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}$

b. $\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$

c. $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$

d. $\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} = \sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}}$

e. $\cos A\cos B\cos C = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

f. $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

g. $2\sqrt{3}\sin B\sin C + \sin A - 2(\sin B + \sin C) = 0$

h. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$

i. $3(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) = \tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C$

j. $\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$

k. $a(1 - 2\cos A) + b(1 - 2\cos B) + c(1 - 2\cos C) = 0$

m. $\begin{cases} a = 2b\cos C \\ a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \end{cases}$

n. $\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - \dfrac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A\cos B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

3.3.10. Cho tam giác ABC nhọn thỏa điều kiện

$$1 + \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A - (\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$= 2\cos A\cos B\cos C$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

3.3.11. Nhận dạng đặc điểm của tam giác ABC nếu biết

a. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$

b. $c = c\cos 2B + b\sin 2B$

c. $a^2 + b^2 + c^2 > 8$

d. $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = \cos A + \cos B + \cos C$

e. $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = c^2 \cot\dfrac{C}{2}$

f. $\sin(A+B)\cos(A-B) = 2\sin A \sin B$

g. $\dfrac{\sin B}{\sin A} = \dfrac{2\cos A + \cos C}{2\cos B + \cos C}$

h. $\sqrt[2012]{\tan A} + \sqrt[2012]{\tan B} + \sqrt[2012]{\tan C} = \sqrt[2012]{\cot\dfrac{A}{2}} + \sqrt[2012]{\cot\dfrac{B}{2}} + \sqrt[2012]{\cot\dfrac{C}{2}}$

i. $\dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{B}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}} = \dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

j. $\tan A \tan B \tan C = \dfrac{12\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos A + \cos B + \cos C}$

k. $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = p^2$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

3.3.1.

a. Theo đẳng thức cơ bản, giả thuyết tương đương với

$$\cos A \cos B \cos C = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(Tam giác ABC đều)

b. Biến đổi tương đương, chú ý xét trường hợp $\cot A \cot B - 1 = 0$ và $\cot A \cot B - 1 \neq 0$

(Tam giác ABC có góc $C = 45^o$)

c. Theo đẳng thức cơ bản, ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(Tam giác ABC có góc $C = 120^o$)

d. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)} \leq a\sqrt{2}$$

Theo định lý hàm số sin, ta lại có :

$$\sin B + \sin C \leq \sqrt{2}\sin A$$

Suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \left(1 + \sqrt{2}\right)\sin A \leq 1 + \sqrt{2}$$

(Tam giác ABC vuông cân ở A)

e. Từ giả thuyết ta suy ra tam giac ABC không tù. Do đó

$$\begin{cases} \sin A \geq \sin C \\ \sin B \geq \sin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{\sin 2A}{2\sin A} \leq \dfrac{\sin 2A}{2\sin C} \\ \cos B = \dfrac{\sin 2B}{2\sin B} \leq \dfrac{\sin 2B}{2\sin C} \end{cases}$$

(Tam giác ABC vuông cân ở A hoặc ở B hoặc đều)

3.3.2.

Nếu $A, B, C \in \left[\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}\right]$ thì $\cos\frac{5A}{2} + \cos\frac{5B}{2} + \cos\frac{5C}{2} < 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (mâu thuẫn)

Do đó,

$$A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{5}, \pi\right)$$

Giả sử $A \leq B \leq C$, chỉ có thể xảy ra khả năng

$$A, B \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right); C \in \left(\frac{3\pi}{5}, \pi\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5A}{2}; \dfrac{5B}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{5C - 4\pi}{2} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right); \cos\left(\dfrac{5C - 4\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{5C}{2} \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$\cos\frac{5A}{2}+\cos\frac{5B}{2}+\cos\frac{5C}{2}\le 3\cos\left(\frac{5A+5B+5C-\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}5A=5B=5C-4\pi\\ A+B+C=\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B=\dfrac{\pi}{15}\\ C=\dfrac{13\pi}{15}\end{cases}$$

3.3.3. Áp dụng đẳng thức cơ bản :

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$$

Khi đó giả thuyết tương đương với

$$\frac{4}{3}(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C)-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=\frac{5}{4}$$

Ta sẽ xét hàm số

$$f(x)=\frac{4}{3}\cos^3 x-\frac{1}{2}\cos 2x\,;\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=-4\cos^2 x\sin x+\sin 2x=(1-\cos 2x)\sin 2x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Lập bảng biến thiên hàm $f(x)$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta có $f(x)\ge f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{12}$

$$\Rightarrow S=f(A)+f(B)+f(C)\ge\frac{5}{4}$$

3.3.4. Theo bất đẳng thức Cauchy, với $k>0$ ta có :

$$(a+kb)^2\ge 4kab\ge 4kab\sin(C+45^o)$$

(Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=kb$ và $C=45^o$)

$$\Leftrightarrow (a+kb)^2\ge 2kab\sqrt{2}\sin C+2kab\sqrt{2}\cos C$$

Do $(a+kb)^2\le 2(a^2+k^2b^2)$

$$\Rightarrow 2(a^2+k^2b^2)\ge 4k\sqrt{2}S+k\sqrt{2}(a^2+b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow \left(2-k\sqrt{2}\right)a^2+\left(2k^2-k\sqrt{2}\right)b^2+k\sqrt{2}c^2\ge 4k\sqrt{2}S$$

Khi đó, chọn $k=1$, ta có :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(a^2+b^2)+c^2\ge 4S$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại C và góc $C = 45^o$.

3.3.10. Đề đã cho được viết lại

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=\cos A\cos B\cos C$$

Ta sẽ chứng minh :

$$\left(\frac{1-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1-\cos B}{\cos B}\right)\left(\frac{1-\cos C}{\cos C}\right)\geq 1$$

Ta đặt :

$$\begin{cases} x=\tan\frac{A}{2} \\ y=\tan\frac{B}{2} \\ z=\tan\frac{C}{2} \end{cases} (x,y,z>0) \Longrightarrow \begin{cases} \cos A=\frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \cos B=\frac{1-y^2}{1+y^2} \\ \cos C=\frac{1-z^2}{1+z^2} \end{cases}$$

Do đó, điều cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)\geq\frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C\geq\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\geq\tan\frac{B+C}{2}+\tan\frac{C+A}{2}+\tan\frac{A+B}{2}$$

Đọc Thêm

TÓM LƯỢC TIỂU SỬ CÁC NHÀ KHOA HỌC CÓ ẢNH HƯỞNG ĐẾN LƯỢNG GIÁC



(1)HIPPARCHUS (190–120 TCN)

Hipparchus là một nhà thiên văn học, địa lý học, nhà toán học Hy Lạp. Ông được xem là người sáng lập ra môn lượng giác học bởi những tính toán hàm số lượng giác đầu tiên được gọi là bảng lượng giác. Qua đó, ông tính toán các giá trị đặc biệt của lượng giác bằng các mô hình hình học. Nhờ đó, ông có thể giải được các bài toán lượng giác phẳng, cũng như lượng giác cầu.

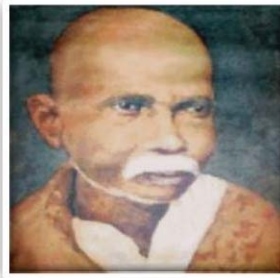
Hipparchus đã phát minh và sử dụng các dụng cụ thiên văn có vòng chia độ. Ông đã xác định được khoảng cách đến Mặt Trời và Mặt Trăng, là người đầu tiên đưa ra một mô hình về lượng mô tả chính xác sự chuyển động của Mặt Trời và Mặt Trăng. Với lý thuyết về nhật nguyệt và lượng giác của mình, ông trở thành người đầu tiên xây dựng và phát triển phương pháp tiên đoán nhật thực. Một thành tựu khác của ông cũng được biết đến đó là việc thiết lập danh mục tọa độ khoảng 850 ngôi sao có chỉ rõ độ chói theo thang độ quy ước.



(2)PTOMELY (khoảng 85-165 TCN)

Ptomely là nhà bác học cổ Hy Lạp có sức ảnh hưởng lớn đến các vấn đề về thiên văn học, địa lý học, quang học và lượng giác học.

Là một người có nhu cầu nghiên cứu thiên văn học và địa lý học nên ông đã góp phần mở rộng thêm các ứng dụng của hình học và lượng giác học. Ông được cho là người đầu tiên tìm ra công thức cộng và trừ cho $\sin(A + B)$ và $\cos(A + B)$, từ đó suy ra được công thức hạ bậc, cho phép ông lập bảng tính với bất kỳ độ chính xác cần thiết nào. Tuy nhiên, những bảng tính trên đều đã bị thất truyền. Ngoài ra, ông còn nghiên cứu phép chiếu trong không gian mà ông cho là có ích cho việc nghiên cứu bầu trời.



[3]<u>SURYA SIDDHANTA (khoảng thế kỷ 4-5)</u>

Surya Siddhanta là một nhà thiên văn học người Ấn Độ, nhưng những công trình nghiên cứu của ông đã góp phần phát triển các vấn đề về hàm lượng giác, đó là việc định nghĩa hàm sin theo nửa góc và nửa dây cung, được cho là mở rộng các kết quả lượng giác của Ptomely.

Xoay quanh các công trình nghiên cứu của ông, ngoài những phép tính lượng giác phục vụ cho thiên văn học, ông được biết đến bởi những ước tính gần đúng về đường kính của các hành tinh. Chẳng hạn như đường kính của sao Thủy là 3.008 dặm, sao Thổ là 73.882 dặm, sao Hỏa là 3.772 dặm…



[4]<u>FRANNCOIS VIÈTE (1540-1603)</u>

Francois Viète là một luật gia, một nghị sĩ và là nhà toán học vĩ đại người Pháp, ông tổ của môn đại số học. Ông viết nhiều công trình về lượng giác, đại số và hình học, và là người đề ra cách giải thống nhất các phương trình bậc 2, bậc 3 và bậc 4 bằng việc khám phá ra mối liên hệ giữa các nghiệm của một đa thức với các hệ số của đa thức đó, ngày nay được gọi là định lý Viète.

Cũng chính định lý Viète của ông đã góp phần phát triển những kỹ thuật tính toán quan trọng trong các bài toán về biến đổi lượng giác, cũng như xác định được chính xác giá trị của các hàm lượng giác ứng với mỗi góc qua việc giải phương trình. Ngoài ra, ông là người đầu tiên phát triển hệ thống những phương pháp giải các tam giác phẳng và tam giác cầu bằng cách dùng cả sáu hàm lượng giác. Đặc biệt chú ý là ông đã tìm ra được các biểu thức cho $\cos nx$ theo $\cos x$ một cách tổng quát và có gợi ý cách giải lượng giác cho trường hợp bất khả quy của các phương trình bậc 3.
Trong công trình nổi tiếng của Viète, ông đã phát triển nhiều ký hiệu đại số và trình bày một quá trình có hệ thống để tìm xấp xỉ liên tiếp nghiệm của phương trình.



[5]HERON (10-75)

Heron là nhà toán học và vật lý người Hy Lạp, vào thời đó ông được biết đến như một tác gia bách khoa trong hai lĩnh vực này bởi những công trình của ông quá phong phú về nội dung cũng như nhiều về số lượng. Mọi luận văn của ông thường hướng tới tính hữu dụng thực tiễn hơn là tính hoàn chỉnh về lý thuyết.Công trình của Heron có thể chia thành hai loại : Cơ học và Hình học.
Nói về cơ học thì ông có các công trình nổi bật như mô tả và xây dựng thiết bị mà các phản ứng bên trong tương tự như động cơ tên lửa và động cơ hơi nước, công trình về máy bán hàng tự động…
Còn về hình học, đây là công trình quan trọng nhất của ông, tiêu biểu là tuyển tập "Metrica" gồm 3 bộ. Trong tác phẩm này, Heron đã rút ra được công thức nổi tiếng để tính diện tích tam giác theo ba cạnh và nửa chu vi, nay được gọi là công thức Heron. Ngoài ra, ông còn đưa ra cách tính xấp xỉ về căn bậc hai của một số nguyên không chính phương, cách tính thể tích các hình nón, hình trụ, hình hộp, hình lăng trụ, hình chóp, hình nón cụt, hình cầu…

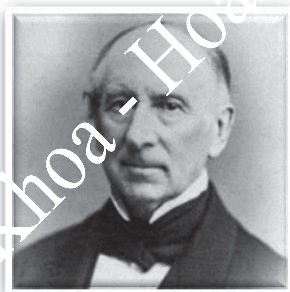
Đọc thêm : Tóm lược tiểu sử các nhà khoa học có ảnh hưởng đến lượng giác



(6)JAKOB STEINER (1796-1863)

Jakob Steiner là nhà toán học người Thụy Sỹ, được biết đến với các công trình nổi tiếng về hình học, và hầu hết ông chỉ nghiên cứu về môn học này. Do đó, đã ảnh hưởng không nhỏ đến các vấn đề về lượng giác, cụ thể là hệ thức lượng trong tam giác, vốn dĩ được xây dựng trên nền tảng của hình học và thiên văn học.

Từ một đề xuất của nhà toán học người Đức – (7)Daniel Christian Ludolph Lehmus (1780-1863), ông đã chứng minh được định lý rằng điều kiện cần và đủ để tam giác cân là hai đường phân giác trong bằng nhau, ngày nay định lý này mang tên Steiner – Lahmus. Các nghiên cứu quan trọng nhất của ông là hình học xạ ảnh và nguyên lý đối ngẫu.



(8)AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857)

Augustin Louis Cauchy là nhà toán học người Pháp, được xem là người đi đầu trong lĩnh vực giải tích toán học. Những công trình của ông hầu hết đặt nền móng cơ sở cho toán học hiện đại như lý thuyết hàm, vật lý và giải tích toán học. Đặc biệt các định nghĩa của chúng ta hiện nay về giới hạn, tính liên tục, khả vi chủ yếu là do ông đề nghị, ông đã đặt ra tiêu chuẩn Cauchy nổi tiếng để nghiên cứu về sự hội tụ của dãy trong các không gian riêng biệt.

Ngoài ra, ông còn phát triển lý thuyết chuỗi, lý thuyết định thức, phép tính tích phân, lý thuyết hàm biến phức và có hàng loạt công trình cho các lĩnh vực hình học, đại số và lý thuyết số… Một hệ quả nhỏ trong các công trình nghiên cứu của ông là bất đẳng thức Cauchy, có ảnh hưởng to lớn đến toán học, trong đó có bất đẳng thức lượng giác.

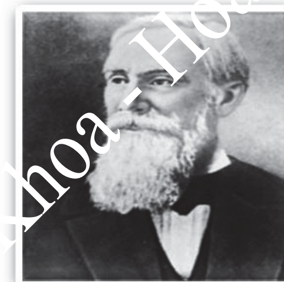
Đọc thêm : Tóm lược tiểu sử các nhà khoa học có ảnh hưởng đến lượng giác



[9]VIKTOR YAKOVLEVICH BUNYAKOVSKY (1804-1889)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky là nhà toán học người Nga, được biết đến với khoảng 150 công trình về toán học và cơ học. Và ông còn được biết nhiều hơn về bất đẳng thức Bunyakovsky, ngày nay chúng ta vẫn thường gọi là bất đẳng thức Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz.

Ông còn nghiên cứu trong các lĩnh vực lý thuyết số, lý thuyết xác suất và ứng dụng, hình học-đặc biệt là lý thuyết các đường song song, cơ học ứng dụng và thủy tĩnh học… và quan tâm đến cả tính toán trong thực tiễn, bằng chứng là một loạt công trình về thống kê và xác suất đã góp phần đáng kể vào việc phát triển lý thuyết thống kê của nước Nga.



[10]PAFNUTY LVOVICH CHEBYSHEV (1821-1894)

Pafnuty Lvovich Chebyshev là một nhà toán học người Nga, được coi là cha đẻ của nền toán học Nga. Ông được biết tới bởi các công trình về lý thuyết xác suất, lý thuyết thống kê và lý thuyết số, đặc biệt trong việc nghiên cứu sự phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên.

Ông còn nghiên cứu về giải tích toán học, chẳng hạn như phương trình vi phân. Ông đã thiết lập một ngành hoàn toàn mới nổi tiếng là “Lý thuyết xấp xỉ tốt nhất các hàm số bằng đa thức”. Ngoài ra, trong nền toán học sơ cấp, ông cũng đóng góp không nhỏ, đó chính là bất đẳng thức Chebyshev nổi tiếng.

Đọc thêm : Tóm lược tiểu sử các nhà khoa học có ảnh hưởng đến lượng giác



(11)JAKOB BERNOULLI (1654-1705)

Jakob Bernoulli là nhà toán học người Thụy Sĩ. Công trình của ông chủ yếu là hình học giải tích, lý thuyết xác suất và phép tính biến phân. Ông được biết đến khi đã cùng với hai nhà bác học Isaac Newton (1643-1689) người Anh và Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) người Đức, phát triển phép tính vi phân và tích phân.

Ông là người nghiên cứu sớm về xác suất toán học. Có nhiều loại trong toán học mang tên ông : sự phân phối Bernoulli, định lý Bernoulli trong xác suất và thống kê, phương trình Bernoulli trong phương trình vi phân, bất đẳng thức Bernoulli…



(12)JOHAN LUDWIG WILLIAM VALDERMAR JENSEN (1859-1925)

Johan Ludwig William Valdermar Jensen là nhà toán học và kỹ sư người Đan Mạch. Tuy công việc chính của ông là một kỹ sư xuất sắc cho một công ty ở Copenhagen và hầu hết các nghiên cứu toán học của ông chỉ được thực hiện trong thời gian rảnh rỗi nhưng ông đã đạt đến mức độ rất cao về toán học. Ông nghiên cứu về chuỗi dài vô tận, hàm gamma, hàm lồi. Qua đó, ông đã đóng góp vào nền toán học sơ cấp : bất đẳng thức Jensen.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán – Hệ thức lượng giác, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2010.

[2] Huỳnh Công Thái, Đậu Thế Cấp, Các chuyên đề - Tìm cực trị và Chứng minh bất đẳng thức chứa hàm lượng giác, NXB Đại học Quốc Gia Tp.HCM, 2007.

[3] Nguyễn Văn Nho, Nguyễn Văn Thổ, Chuyên đề Lượng giác, NXB Tổng hợp Tp.HCM, 2007.

[4] Võ Giang Giai, Tuyển tập 400 bài toán lượng giác, NXB Đại học Sư Phạm, 2007.

[5] Phạm Tấn Phước, Các chuyên đề Lượng giác, NXB Tp.HCM, 1999.

[6] Huỳnh Công Thái, Chuyên đề lượng giác – Đẳng thức, Bất đẳng thức trong tam giác, Nhận dạng tam giác, NXB Đại học Quốc Gia Tp.HCM, 2002.

[7] James Stewart, Calculus – Concepts and Contexts, Richard Stratton, 2005.

[8] Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XII – 2006, Toán học, NXBGD, 2006.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIII – 2007, Toán học, NXBGD, 2007.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIV – 2008, Toán học, NXBGD, 2008.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XV – 2009, Toán học, NXBGD, 2009.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XVI – 2006, Toán học, NXBGD, 2010.

[9] Nguyễn Phúc Lộc, Lịch sử Toán học, NXBGD, 2008.